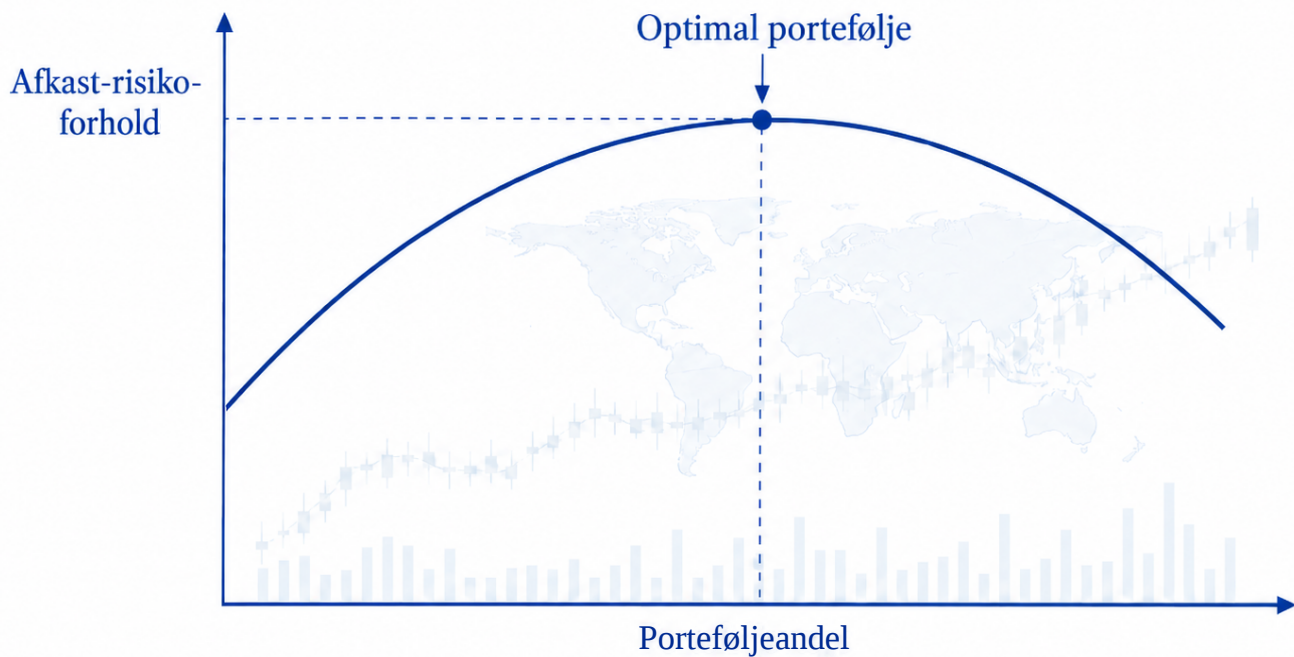




Aktier – teorien bag investering

Teorikompendie med supplerende artikler og videoer

Vejledende løsninger

1 Opgaver

Bemærkning

Alle beregninger i løsningsforslagene foretages med uafrundede værdier, og der afrundes først i det viste slutresultat. Hvis en porteføljeandel eksempelvis beregnes til 25,7511% og vises som 25,75%, anvendes 25,7511% i de efterfølgende beregninger og ikke den afrundede værdi 25,75%.

1.1 Afkast

Opgave 1: Årligt afkast

Løsning:

1. Afkast i kroner beregnes med formlen fra Afsnit 2.1:

$$\begin{aligned}\text{Afkast i kr.} &= \text{Slutkurs i kr.} - \text{Startkurs i kr.} \\ &= 112 \text{ kr.} - 100 \text{ kr.} \\ &= 12 \text{ kr.}\end{aligned}$$

Afkastet i kroner er derfor 12 kr.

2. Afkastet i procent beregnes med formlen fra Afsnit 2.1:

$$\begin{aligned}\text{Afkast i pct.} &= \frac{\text{Slutkurs i kr.} - \text{Startkurs i kr.}}{\text{Startkurs i kr.}} \\ &= \frac{12 \text{ kr.}}{100 \text{ kr.}} \\ &= 0,12 \\ &= 12\%.\end{aligned}$$

Afkastet i procent er derfor 12%.

Opgave 2: Gennemsnitligt årligt afkast

Løsning:

Det gennemsnitlige afkast beregnes med formlen fra Afsnit 2.1:

$$\begin{aligned}a &= \frac{8\% + (-3\%) + 10\%}{3} \\ &= \frac{0,08 + (-0,03) + 0,10}{3} \\ &= 0,05 \\ &= 5\%.\end{aligned}$$

Det gennemsnitlige årlige afkast er derfor 5%.

Opgave 3: Find slutkurs ud fra afkast i procent**Løsning:**

1. Afkastet i kroner findes ved at gange startkursen med afkastet i procent:

$$\begin{aligned}
 \text{Afkast i kr.} &= \text{Startkurs i kr.} \cdot \text{afkast i pct.} \\
 &= 80 \text{ kr.} \cdot 15\% \\
 &= 80 \text{ kr.} \cdot 0,15 \\
 &= 12 \text{ kr.}
 \end{aligned}$$

Afkastet er derfor 12 kr.

2. Slutkursen findes ved at lægge afkastet i kroner til startkursen:

$$\begin{aligned}
 \text{Slutkurs i kr.} &= \text{Startkurs i kr.} + \text{afkast i kr.} \\
 &= 80 \text{ kr.} + 12 \text{ kr.} \\
 &= 92 \text{ kr.}
 \end{aligned}$$

Aktien koster derfor 92 kr. ved årets slutning.

1.2 Standardafvigelse**Opgave 1: Standardafvigelse****Løsning:**

Vi anvender formelen for standardafvigelse fra Afsnit 2.4:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - a)^2 + (a_2 - a)^2 + \dots + (a_n - a)^2}{n - 1}}.$$

Her er $a_1, a_2, \dots, a_n$ aktiens afkast i de enkelte år, a er det gennemsnitlige afkast, og n er antallet af observationer.

I denne opgave er

$$a_1 = 5\%, \quad a_2 = 2\%, \quad a_3 = 8\%,$$

og $n = 3$, fordi der er tre observationer i datasættet (én observation for hvert af de tre år).

Vi beregner nu standardafvigelsen trin for trin.

1. Det gennemsnitlige afkast:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{5\% + 2\% + 8\%}{3} \\
 &= \frac{0,05 + 0,02 + 0,08}{3} \\
 &= 0,05.
 \end{aligned}$$

2. Afvigelser:

$$\begin{aligned}\text{År 1: } 5\% - 5\% &= 0,05 - 0,05 \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{År 2: } 2\% - 5\% &= 0,02 - 0,05 \\ &= -0,03,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{År 3: } 8\% - 5\% &= 0,08 - 0,05 \\ &= 0,03.\end{aligned}$$

3. De kvadrerede afvigelser samles:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{0^2 + (-0,03)^2 + (0,03)^2}{3 - 1} \\ &= \frac{0 + 0,0009 + 0,0009}{2} \\ &= 0,0009.\end{aligned}$$

4. Standardafvigelse:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{0,0009} \\ &= 0,03 \\ &= 3\%.\end{aligned}$$

Standardafvigelsen er derfor 3%.

Opgave 2: Standardafvigelse – med negativt afkast

Løsning:

Vi anvender formlen for standardafvigelse fra Afsnit 2.4:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - a)^2 + (a_2 - a)^2 + \dots + (a_n - a)^2}{n - 1}},$$

hvor $a_1, a_2, \dots, a_n$ er aktiens afkast i de enkelte år, a er det gennemsnitlige afkast, og n er antallet af observationer.

I denne opgave er

$$a_1 = 10\%, \quad a_2 = -4\%, \quad a_3 = 6\%, \quad a_4 = 2\%,$$

og $n = 4$, fordi der er fire observationer i datasættet (én observation for hvert af de fire år).

Vi beregner standardafvigelsen trin for trin:

1. Det gennemsnitlige afkast:

$$\begin{aligned}a &= \frac{10\% + (-4\%) + 6\% + 2\%}{4} \\ &= \frac{0,10 + (-0,04) + 0,06 + 0,02}{4} \\ &= 0,035.\end{aligned}$$

2. Afvigelser:

$$\begin{aligned}\text{År 1: } 10\% - 3,5\% &= 0,10 - 0,035 \\ &= 0,065,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{År 2: } -4\% - 3,5\% &= -0,04 - 0,035 \\ &= -0,075,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{År 3: } 6\% - 3,5\% &= 0,06 - 0,035 \\ &= 0,025,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{År 4: } 2\% - 3,5\% &= 0,02 - 0,035 \\ &= -0,015.\end{aligned}$$

3. De kvadrerede afvigelser samles:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{(0,065)^2 + (-0,075)^2 + (0,025)^2 + (-0,015)^2}{4 - 1} \\ &= \frac{0,004225 + 0,005625 + 0,000625 + 0,000225}{3} \\ &= 0,003567.\end{aligned}$$

4. Standardafvigelse:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{0,003567} \\ &= 0,0597 \\ &= 5,97\%.\end{aligned}$$

Standardafvigelsen er derfor 5,97%.

Opgave 3: Standardafvigelse – sammenligning

Løsning:

Aktie A: Vi anvender formelen for standardafvigelse fra Afsnit 2.4 på Aktie A's afkast:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - a)^2 + (a_2 - a)^2 + \dots + (a_n - a)^2}{n - 1}},$$

her er $a_1, a_2, \dots, a_n$ aktiens afkast i de enkelte år, a er det gennemsnitlige afkast, og n er antallet af observationer. For Aktie A er

$$a_1 = 2\%, \quad a_2 = 4\%, \quad a_3 = 6\%, \quad a_4 = 8\%, \quad a_5 = 10\%,$$

og $n = 5$, fordi der er fem observationer i datasættet (én observation for hvert af de fem år).

Vi beregner standardafvigelsen trin for trin.

1. Det gennemsnitlige afkast:

$$\begin{aligned}a_A &= \frac{2\% + 4\% + 6\% + 8\% + 10\%}{5} \\ &= \frac{0,02 + 0,04 + 0,06 + 0,08 + 0,10}{5} \\ &= 0,06.\end{aligned}$$

2. Afvigelser:

$$\begin{aligned}
 2\% - 6\% &= 0,02 - 0,06 \\
 &= -0,04, \\
 4\% - 6\% &= 0,04 - 0,06 \\
 &= -0,02, \\
 6\% - 6\% &= 0,06 - 0,06 \\
 &= 0, \\
 8\% - 6\% &= 0,08 - 0,06 \\
 &= 0,02, \\
 10\% - 6\% &= 0,10 - 0,06 \\
 &= 0,04.
 \end{aligned}$$

3. De kvadrerede afvigelser samles:

$$\begin{aligned}
 \sigma_A^2 &= \frac{(-0,04)^2 + (-0,02)^2 + 0^2 + (0,02)^2 + (0,04)^2}{5 - 1} \\
 &= \frac{0,0016 + 0,0004 + 0 + 0,0004 + 0,0016}{4} \\
 &= 0,0010.
 \end{aligned}$$

4. Standardafvigelse:

$$\begin{aligned}
 \sigma_A &= \sqrt{0,0010} \\
 &= 0,0316 \\
 &= 3,16\%.
 \end{aligned}$$

Aktie B: Vi anvender formelen for standardafvigelse fra Afsnit 2.4 på Aktie B's afkast:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - a)^2 + (a_2 - a)^2 + \dots + (a_n - a)^2}{n - 1}},$$

her er $a_1, a_2, \dots, a_n$ aktiens afkast i de enkelte år, a er det gennemsnitlige afkast, og n er antallet af observationer. For Aktie B er

$$a_1 = 5\%, \quad a_2 = 0\%, \quad a_3 = 5\%, \quad a_4 = 10\%, \quad a_5 = 15\%,$$

og $n = 5$, fordi der er fem observationer i datasættet (én observation for hvert af de fem år).

Vi beregner standardafvigelsen trin for trin.

1. Det gennemsnitlige afkast:

$$\begin{aligned}
 a_B &= \frac{5\% + 0\% + 5\% + 10\% + 15\%}{5} \\
 &= \frac{0,05 + 0,00 + 0,05 + 0,10 + 0,15}{5} \\
 &= 0,07.
 \end{aligned}$$

2. Afvigelser:

$$\begin{aligned} 5\% - 7\% &= 0,05 - 0,07 \\ &= -0,02, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0\% - 7\% &= 0 - 0,07 \\ &= -0,07, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5\% - 7\% &= 0,05 - 0,07 \\ &= -0,02, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10\% - 7\% &= 0,10 - 0,07 \\ &= 0,03, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15\% - 7\% &= 0,15 - 0,07 \\ &= 0,08. \end{aligned}$$

3. De kvadrerede afvigelser samles:

$$\begin{aligned} \sigma_B^2 &= \frac{(-0,02)^2 + (-0,07)^2 + (-0,02)^2 + (0,03)^2 + (0,08)^2}{5 - 1} \\ &= \frac{0,0004 + 0,0049 + 0,0004 + 0,0009 + 0,0064}{4} \\ &= 0,00325. \end{aligned}$$

4. Standardafvigelse:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \sqrt{0,00325} \\ &= 0,0570 \\ &= 5,70\%. \end{aligned}$$

Aktie B har den største standardafvigelse: 5,70% mod 3,16% for Aktie A.

1.3 Porteføljeafkast

Opgave 1: Beregning af porteføljeafkast

Løsning:

Porteføljens forventede afkast beregnes med formlen fra Afsnit 2.9:

$$a_p = p_A \cdot a_A + p_B \cdot a_B,$$

her er a_p porteføljens forventede afkast, p_A og p_B er porteføljeandelene i Aktie A og Aktie B og a_A og a_B er Aktie A's og Aktie B's forventede afkast.

De oplyste værdier indsættes i formlen:

$$\begin{aligned} a_p &= 40\% \cdot 8\% + 60\% \cdot 12\% \\ &= 0,40 \cdot 0,08 + 0,60 \cdot 0,12 \\ &= 0,032 + 0,072 \\ &= 0,104 \\ &= 10,4\%. \end{aligned}$$

Porteføljens forventede afkast er derfor 10,4%.

Opgave 2: To fordelinger – hvilken giver højest forventet afkast?

Løsning:

Porteføljens forventede afkast beregnes med formlen fra Afsnit 2.9:

$$a_p = p_A \cdot a_A + p_B \cdot a_B,$$

hvor p_A og p_B er porteføljeandelene i Aktie A og Aktie B og a_A og a_B er Aktie A's og Aktie B's forventede afkast.

1. Hvis 70% investeres i Aktie A og 30% i Aktie B, fås:

$$\begin{aligned} a_p &= 70\% \cdot 9\% + 30\% \cdot 4\% \\ &= 0,70 \cdot 0,09 + 0,30 \cdot 0,04 \\ &= 0,063 + 0,012 \\ &= 0,075 \\ &= 7,5\%. \end{aligned}$$

Porteføljens forventede afkast er derfor 7,5%.

2. Hvis 40% investeres i Aktie A og 60% i Aktie B, fås:

$$\begin{aligned} a_p &= 40\% \cdot 9\% + 60\% \cdot 4\% \\ &= 0,40 \cdot 0,09 + 0,60 \cdot 0,04 \\ &= 0,036 + 0,024 \\ &= 0,060 \\ &= 6,0\%. \end{aligned}$$

Porteføljens forventede afkast er derfor 6,0%.

3. Den første fordeling giver det højeste forventede afkast. Forskellen i forventet afkast mellem de to fordelinger er:

$$\begin{aligned} \Delta a_p &= 7,5\% - 6,0\% \\ &= 0,075 - 0,060 \\ &= 0,015 \\ &= 1,5 \text{ procentpoint.} \end{aligned}$$

Da Aktie A har et højere forventet afkast (9%) end Aktie B (4%), vil en større porteføljeandel i Aktie A øge porteføljens forventede afkast. I den første fordeling investeres 70% i Aktie A mod 40% i den anden fordeling, og derfor giver den første fordeling det højeste forventede afkast.

Opgave 3: Find porteføljeandelen ud fra et ønsket porteføljeafkast**Løsning:**

Lad p_A betegne porteføljeandelen i Aktie A og p_B porteføljeandelen i Aktie B. Som beskrevet i Afsnit 2.9 skal porteføljeandelene tilsammen udgøre 100%, fordi hele investeringen fordeles mellem de to aktier. Derfor gælder:

$$p_A + p_B = 100\% = 1.$$

Dette kan omskrives til:

$$p_B = 1 - p_A.$$

Porteføljens forventede afkast beregnes med formlen fra Afsnit 2.9:

$$a_p = p_A \cdot a_A + p_B \cdot a_B,$$

hvor a_p er porteføljens forventede afkast, p_A og p_B er porteføljeandelene i Aktie A og Aktie B, og a_A og a_B er Aktie A's og Aktie B's forventede afkast. I denne formel indsætter vi de oplyste værdier: Aktie A og Aktie B har forventede afkast på henholdsvis 10% og 4%, og vi ønsker et samlet porteføljeafkast på 8%:

$$\begin{aligned} p_A \cdot 10\% + p_B \cdot 4\% &= 8\% \\ \iff p_A \cdot 0,10 + p_B \cdot 0,04 &= 0,08. \end{aligned}$$

Da $p_B = 1 - p_A$, kan vi erstatte p_B i ligningen:

$$p_A \cdot 0,10 + (1 - p_A) \cdot 0,04 = 0,08.$$

Nu har vi kun én ukendt, nemlig p_A , og ligningen kan løses trin for trin:

$$\begin{aligned} 0,10 \cdot p_A + 0,04 \cdot (1 - p_A) &= 0,08 \\ \iff 0,10 \cdot p_A + 0,04 - 0,04 \cdot p_A &= 0,08 \\ \iff 0,06 \cdot p_A + 0,04 &= 0,08 \\ \iff 0,06 \cdot p_A &= 0,04 \\ \iff p_A &= \frac{0,04}{0,06} \\ \iff p_A &= 0,6667. \end{aligned}$$

1. Porteføljeandelen i Aktie A er dermed $p_A = 66,67\%$.
2. Porteføljeandelen i Aktie B er den resterende del af porteføljen:

$$p_B = 100\% - 66,67\% = 33,33\%.$$

Der skal altså investeres 33,33% i Aktie B.

Opgave 4: Fra kroner til porteføljeandele og porteføljeafkast

Løsning:

1. Porteføljeandelene findes ved at sætte hver investering i forhold til den samlede investering.
Den samlede investering er:

$$8.000 \text{ kr.} + 12.000 \text{ kr.} = 20.000 \text{ kr.}$$

Porteføljeandelen i Aktie A er:

$$\begin{aligned} p_A &= \frac{\text{investering i Aktie A}}{\text{samlet investering}} \\ &= \frac{8.000 \text{ kr.}}{20.000 \text{ kr.}} \\ &= 0,40 \\ &= 40\%. \end{aligned}$$

Tilsvarende er porteføljeandelen i Aktie B:

$$\begin{aligned} p_B &= \frac{\text{investering i Aktie B}}{\text{samlet investering}} \\ &= \frac{12.000 \text{ kr.}}{20.000 \text{ kr.}} \\ &= 0,60 \\ &= 60\%. \end{aligned}$$

I porteføljen investeres derfor 40% i Aktie A og 60% i Aktie B.

2. Porteføljens forventede afkast beregnes med formelen fra Afsnit 2.9:

$$a_p = p_A \cdot a_A + p_B \cdot a_B,$$

hvor p_A og p_B er porteføljeandelene i Aktie A og Aktie B, og a_A og a_B er Aktie A's og Aktie B's forventede afkast. De oplyste værdier indsættes i formelen:

$$\begin{aligned} a_p &= 40\% \cdot 6\% + 60\% \cdot 11\% \\ &= 0,40 \cdot 0,06 + 0,60 \cdot 0,11 \\ &= 0,024 + 0,066 \\ &= 0,09 \\ &= 9,0\%. \end{aligned}$$

Porteføljens forventede afkast er derfor 9,0%.

1.4 Porteføljens standardafvigelse

Opgave 1: Beregning af porteføljens standardafvigelse

Løsning:

Udtrykket under kvadratroden består af tre led. De første to led viser risikoen fra hver af de to aktier, mens det sidste led viser, hvordan aktierne påvirker hinanden gennem korrelationen. Vi beregner nu de tre led hver for sig.

Det første led er:

$$\begin{aligned} p_1^2 \cdot \sigma_1^2 &= (50\%)^2 \cdot (15\%)^2 \\ &= (0,50)^2 \cdot (0,15)^2 \\ &= 0,25 \cdot 0,0225 \\ &= 0,005625. \end{aligned}$$

Det andet led er:

$$\begin{aligned} p_2^2 \cdot \sigma_2^2 &= (50\%)^2 \cdot (10\%)^2 \\ &= (0,50)^2 \cdot (0,10)^2 \\ &= 0,25 \cdot 0,01 \\ &= 0,0025. \end{aligned}$$

Det tredje led er:

$$\begin{aligned} 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12} &= 2 \cdot 50\% \cdot 50\% \cdot 15\% \cdot 10\% \cdot 0,20 \\ &= 2 \cdot 0,50 \cdot 0,50 \cdot 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,20 \\ &= 0,0015. \end{aligned}$$

De tre led lægges sammen, og der tages kvadratroden:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{0,005625 + 0,0025 + 0,0015} \\ &= \sqrt{0,009625} \\ &= 0,0981 \\ &= 9,81\%. \end{aligned}$$

Porteføljens standardafvigelse er derfor 9,81%.

Opgave 2: Beregning af porteføljens standardafvigelse

Løsning:

Porteføljens standardafvigelse beregnes med formlen fra Afsnit 2.11:

$$\sigma_p = \sqrt{p_1^2 \cdot \sigma_1^2 + p_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}},$$

her er σ_p porteføljens standardafvigelse, p_1 og p_2 er porteføljeandelene i Aktie 1 og Aktie 2, σ_1 og σ_2 er Aktie 1's og Aktie 2's standardafvigelser og ρ_{12} er korrelationen mellem Aktie 1 og Aktie 2.

Udtrykket under kvadratroden består af tre led. De første to led viser risikoen fra hver af de to aktier, mens det sidste led viser, hvordan aktierne påvirker hinanden gennem korrelationen. Vi beregner nu de tre led hver for sig.

Det første led er:

$$\begin{aligned} p_1^2 \cdot \sigma_1^2 &= (60\%)^2 \cdot (18\%)^2 \\ &= (0,60)^2 \cdot (0,18)^2 \\ &= 0,36 \cdot 0,0324 \\ &= 0,011664. \end{aligned}$$

Det andet led er:

$$\begin{aligned} p_2^2 \cdot \sigma_2^2 &= (40\%)^2 \cdot (12\%)^2 \\ &= (0,40)^2 \cdot (0,12)^2 \\ &= 0,16 \cdot 0,0144 \\ &= 0,002304. \end{aligned}$$

Det tredje led er:

$$\begin{aligned} 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12} &= 2 \cdot 60\% \cdot 40\% \cdot 18\% \cdot 12\% \cdot 0,25 \\ &= 2 \cdot 0,60 \cdot 0,40 \cdot 0,18 \cdot 0,12 \cdot 0,25 \\ &= 0,002592. \end{aligned}$$

De tre led lægges sammen, og der tages kvadratroden:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{0,011664 + 0,002304 + 0,002592} \\ &= \sqrt{0,01656} \\ &= 0,1287 \\ &= 12,87\%. \end{aligned}$$

Porteføljens standardafvigelse er derfor 12,87%.

Opgave 3: Ændring i porteføljeandele

Løsning:

Porteføljens standardafvigelse beregnes med formlen fra Afsnit 2.11:

$$\sigma_p = \sqrt{p_1^2 \cdot \sigma_1^2 + p_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}},$$

her er σ_p porteføljens standardafvigelse, p_1 og p_2 er porteføljeandelene i Aktie 1 og Aktie 2, σ_1 og σ_2 er Aktie 1's og Aktie 2's standardafvigelser og ρ_{12} er korrelationen mellem Aktie 1 og Aktie 2.

Da korrelationen er nul, bliver det tredje led lig med nul:

$$2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12} = 0.$$

Formlen kan derfor skrives som:

$$\sigma_p = \sqrt{p_1^2 \cdot \sigma_1^2 + p_2^2 \cdot \sigma_2^2}.$$

1. I det første tilfælde er $p_1 = 20\%$. Som beskrevet i Afsnit 2.9 udgør porteføljeandelene tilsammen 100%. Aktie 2s porteføljeandel findes derfor som:

$$\begin{aligned} p_2 &= 100\% - 20\% \\ &= 1 - 0,20 \\ &= 0,80 \\ &= 80\%. \end{aligned}$$

Vi indsætter værdierne i formelen for porteføljens standardafvigelse:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{(20\%)^2 \cdot (25\%)^2 + (80\%)^2 \cdot (10\%)^2} \\ &= \sqrt{(0,20)^2 \cdot (0,25)^2 + (0,80)^2 \cdot (0,10)^2} \\ &= \sqrt{0,04 \cdot 0,0625 + 0,64 \cdot 0,01} \\ &= \sqrt{0,0025 + 0,0064} \\ &= \sqrt{0,0089} \\ &= 0,0943 \\ &= 9,43\%. \end{aligned}$$

Porteføljens standardafvigelse er 9,43%.

2. I det andet tilfælde er $p_1 = 80\%$. Aktie 2s porteføljeandel er derfor:

$$\begin{aligned} p_2 &= 100\% - 80\% \\ &= 1 - 0,80 \\ &= 0,20 \\ &= 20\%. \end{aligned}$$

Porteføljens standardafvigelse beregnes som:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{(80\%)^2 \cdot (25\%)^2 + (20\%)^2 \cdot (10\%)^2} \\ &= \sqrt{(0,80)^2 \cdot (0,25)^2 + (0,20)^2 \cdot (0,10)^2} \\ &= \sqrt{0,64 \cdot 0,0625 + 0,04 \cdot 0,01} \\ &= \sqrt{0,0400 + 0,0004} \\ &= \sqrt{0,0404} \\ &= 0,2010 \\ &= 20,10\%. \end{aligned}$$

Porteføljens standardafvigelse er 20,10%.

3. Hvis porteføljeandelen i Aktie 1 øges fra 20% til 80%, stiger porteføljens standardafvigelse fra 9,43% til 20,10%. Aktie 1 har en højere standardafvigelse end Aktie 2, og derfor får porteføljen en højere standardafvigelse, hvis en større del af investeringen placeres i Aktie 1.

Opgave 4: Porteføljens standardafvigelse og diversifikation

Løsning:

1. Porteføljens standardafvigelse beregnes med formelen fra Afsnit 2.11:

$$\sigma_p = \sqrt{p_1^2 \cdot \sigma_1^2 + p_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}},$$

her er σ_p porteføljens standardafvigelse, p_1 og p_2 er porteføljeandelene i Aktie 1 og Aktie 2, σ_1 og σ_2 er Aktie 1's og Aktie 2's standardafvigelser og ρ_{12} er korrelationen mellem Aktie 1 og Aktie 2.

Udtrykket under kvadratroden består af tre led. De første to led viser risikoen fra hver af de to aktier, mens det sidste led viser, hvordan aktierne påvirker hinanden gennem korrelationen. Vi beregner nu de tre led hver for sig.

Det første led er:

$$\begin{aligned} p_1^2 \cdot \sigma_1^2 &= (75\%)^2 \cdot (22\%)^2 \\ &= (0,75)^2 \cdot (0,22)^2 \\ &= 0,5625 \cdot 0,0484 \\ &= 0,027225. \end{aligned}$$

Det andet led er:

$$\begin{aligned} p_2^2 \cdot \sigma_2^2 &= (25\%)^2 \cdot (14\%)^2 \\ &= (0,25)^2 \cdot (0,14)^2 \\ &= 0,0625 \cdot 0,0196 \\ &= 0,001225. \end{aligned}$$

Det tredje led er:

$$\begin{aligned} 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12} &= 2 \cdot 75\% \cdot 25\% \cdot 22\% \cdot 14\% \cdot (-0,90) \\ &= 2 \cdot 0,75 \cdot 0,25 \cdot 0,22 \cdot 0,14 \cdot (-0,90) \\ &= -0,010395. \end{aligned}$$

De tre led lægges sammen, og der tages kvadratroden:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{0,027225 + 0,001225 - 0,010395} \\ &= \sqrt{0,018055} \\ &= 0,1344 \\ &= 13,44\%. \end{aligned}$$

Porteføljens standardafvigelse er derfor 13,44%.

2. Beregningen viser, at man ved at kombinere to aktier kan konstruere en portefølje, hvis standardafvigelse er lavere end standardafvigelsen for hver af de to enkeltaktier:

$$13,44\% < 14\% < 22\%.$$

Dette kaldes en risikoreduktion gennem diversificering.

1.5 Den optimale portefølje

Opgave 1: Find den optimale portefølje

Løsning:

1. Tælleren i formelen for den optimale portefølje er:

$$\begin{aligned}
 & a_A \cdot \sigma_S^2 - a_S \cdot \sigma_A \cdot \sigma_S \cdot \rho_{AS} \\
 &= 8\% \cdot (15\%)^2 - 5\% \cdot 20\% \cdot 15\% \cdot 0,30 \\
 &= 0,08 \cdot (0,15)^2 - 0,05 \cdot 0,20 \cdot 0,15 \cdot 0,30 \\
 &= 0,00180 - 0,00045 \\
 &= 0,00135.
 \end{aligned}$$

Nævneren i formelen for den optimale portefølje er:

$$\begin{aligned}
 & a_A \cdot \sigma_S^2 + a_S \cdot \sigma_A^2 - (a_A + a_S) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_S \cdot \rho_{AS} \\
 &= 8\% \cdot (15\%)^2 + 5\% \cdot (20\%)^2 - (8\% + 5\%) \cdot 20\% \cdot 15\% \cdot 0,30 \\
 &= 0,08 \cdot (0,15)^2 + 0,05 \cdot (0,20)^2 - (0,08 + 0,05) \cdot 0,20 \cdot 0,15 \cdot 0,30 \\
 &= 0,00180 + 0,00200 - 0,00117 \\
 &= 0,00263.
 \end{aligned}$$

Porteføljeandelen i Amazon-aktien er derfor:

$$\begin{aligned}
 p_A &= \frac{0,00135}{0,00263} \\
 &= 0,5133 \\
 &= 51,33\%.
 \end{aligned}$$

2. Som beskrevet i Afsnit 2.9 udgør porteføljeandelene tilsammen 100%. Siemens-aktiens porteføljeandel findes derfor som:

$$\begin{aligned}
 p_S &= 100\% - 51,33\% \\
 &= 1 - 0,5133 \\
 &= 0,4867 \\
 &= 48,67\%.
 \end{aligned}$$

Dermed er den optimale porteføljefordeling 51,33% i Amazon-aktien og 48,67% i Siemens-aktien.

Opgave 2: Korrelationens betydning for den optimale portefølje

Løsning:

1. Vi antager, at $\rho_{AT} = 0,80$. Den optimale porteføljeandel i Apple-aktien beregnes med formelen fra Kapitel 3:

$$p_A = \frac{a_A \cdot \sigma_T^2 - a_T \cdot \sigma_A \cdot \sigma_T \cdot \rho_{AT}}{a_A \cdot \sigma_T^2 + a_T \cdot \sigma_A^2 - (a_A + a_T) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_T \cdot \rho_{AT}},$$

her er p_A porteføljeandelen i Apple-aktien, a_A og a_T er Apple-aktiens og Tesla-aktiens forventede afkast, σ_A og σ_T er Apple-aktiens og Tesla-aktiens standardafvigelser, og ρ_{AT} er korrelationen mellem Apple-aktien og Tesla-aktien.

Tælleren i formen for den optimale portefølje er:

$$\begin{aligned} a_A \cdot \sigma_T^2 - a_T \cdot \sigma_A \cdot \sigma_T \cdot \rho_{AT} &= 8\% \cdot (30\%)^2 - 12\% \cdot 18\% \cdot 30\% \cdot 0,80 \\ &= 0,08 \cdot (0,30)^2 - 0,12 \cdot 0,18 \cdot 0,30 \cdot 0,80 \\ &= 0,0072 - 0,005184 \\ &= 0,002016. \end{aligned}$$

Nævneren i formen for den optimale portefølje er:

$$\begin{aligned} a_A \cdot \sigma_T^2 + a_T \cdot \sigma_A^2 - (a_A + a_T) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_T \cdot \rho_{AT} &= 8\% \cdot (30\%)^2 + 12\% \cdot (18\%)^2 \\ &\quad - (8\% + 12\%) \cdot 18\% \cdot 30\% \cdot 0,80 \\ &= 0,08 \cdot (0,30)^2 + 0,12 \cdot (0,18)^2 \\ &\quad - (0,08 + 0,12) \cdot 0,18 \cdot 0,30 \cdot 0,80 \\ &= 0,0072 + 0,003888 - 0,00864 \\ &= 0,002448. \end{aligned}$$

Den optimale porteføljeandel i Apple-aktien er derfor:

$$\begin{aligned} p_A &= \frac{0,002016}{0,002448} \\ &= 0,8235 \\ &= 82,35\%. \end{aligned}$$

Som beskrevet i Afsnit 2.9 udgør porteføljeandelene tilsammen 100%. Tesla-aktiens porteføljeandel er derfor:

$$\begin{aligned} p_T &= 100\% - 82,35\% \\ &= 1 - 0,8235 \\ &= 0,1765 \\ &= 17,65\%. \end{aligned}$$

2. Vi antager, at $\rho_{AT} = 0$. Tælleren i formen for den optimale porteføljeandel i Apple-aktien beregnes som:

$$\begin{aligned} a_A \cdot \sigma_T^2 - a_T \cdot \sigma_A \cdot \sigma_T \cdot \rho_{AT} &= 8\% \cdot (30\%)^2 - 12\% \cdot 18\% \cdot 30\% \cdot 0,0 \\ &= 0,08 \cdot (0,30)^2 - 0,12 \cdot 0,18 \cdot 0,30 \cdot 0,0 \\ &= 0,0072. \end{aligned}$$

Nævneren i formelen for den optimale porteføljeandel i Apple-aktien beregnes som:

$$\begin{aligned}
 & a_A \cdot \sigma_T^2 + a_T \cdot \sigma_A^2 - (a_A + a_T) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_T \cdot \rho_{AT} \\
 &= 8\% \cdot (30\%)^2 + 12\% \cdot (18\%)^2 \\
 &\quad - (8\% + 12\%) \cdot 18\% \cdot 30\% \cdot 0,0 \\
 &= 0,08 \cdot (0,30)^2 + 0,12 \cdot (0,18)^2 \\
 &\quad - (0,08 + 0,12) \cdot 0,18 \cdot 0,30 \cdot 0,0 \\
 &= 0,0072 + 0,003888 \\
 &= 0,011088.
 \end{aligned}$$

Den optimale porteføljeandel i Apple-aktien er derfor:

$$\begin{aligned}
 p_A &= \frac{0,0072}{0,011088} \\
 &= 0,6494 \\
 &= 64,94\%.
 \end{aligned}$$

Tesla-aktiens porteføljeandel er derfor:

$$\begin{aligned}
 p_T &= 100\% - 64,94\% \\
 &= 1 - 0,6494 \\
 &= 0,3506 \\
 &= 35,06\%.
 \end{aligned}$$

3. Vi antager, at $\rho_{AT} = -0,60$. Tælleren i formelen for den optimale porteføljeandel i Apple-aktien beregnes som:

$$\begin{aligned}
 a_A \cdot \sigma_T^2 - a_T \cdot \sigma_A \cdot \sigma_T \cdot \rho_{AT} &= 8\% \cdot (30\%)^2 - 12\% \cdot 18\% \cdot 30\% \cdot (-0,60) \\
 &= 0,08 \cdot (0,30)^2 - 0,12 \cdot 0,18 \cdot 0,30 \cdot (-0,60) \\
 &= 0,0072 + 0,003888 \\
 &= 0,011088.
 \end{aligned}$$

Nævneren i formelen for den optimale porteføljeandel i Apple-aktien beregnes som:

$$\begin{aligned}
 & a_A \cdot \sigma_T^2 + a_T \cdot \sigma_A^2 - (a_A + a_T) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_T \cdot \rho_{AT} \\
 &= 8\% \cdot (30\%)^2 + 12\% \cdot (18\%)^2 \\
 &\quad - (8\% + 12\%) \cdot 18\% \cdot 30\% \cdot (-0,60) \\
 &= 0,08 \cdot (0,30)^2 + 0,12 \cdot (0,18)^2 \\
 &\quad - (0,08 + 0,12) \cdot 0,18 \cdot 0,30 \cdot (-0,60) \\
 &= 0,0072 + 0,003888 + 0,00648 \\
 &= 0,017568.
 \end{aligned}$$

Den optimale porteføljeandel i Apple-aktien er derfor:

$$\begin{aligned}
 p_A &= \frac{0,011088}{0,017568} \\
 &= 0,6311 \\
 &= 63,11\%.
 \end{aligned}$$

Tesla-aktiens porteføljeandel er derfor:

$$\begin{aligned} p_T &= 100\% - 63,11\% \\ &= 1 - 0,6311 \\ &= 0,3689 \\ &= 36,89\%. \end{aligned}$$

4. Resultaterne kan sammenfattes således:

ρ_{AT}	p_A	p_T
0,80	82,35%	17,65%
0,0	64,94%	35,06%
-0,60	63,11%	36,89%

Intuitionen er følgende: Hvis korrelationen er høj, dvs. er lig med 0,80, bevæger Apple-aktien og Tesla-aktien sig ofte i samme retning. Hvis den ene aktie falder, er der derfor stor risiko for, at den anden også falder. Der er dermed ikke så meget at vinde ved at kombinere de to aktier. Da Apple-aktien har den laveste risiko, placeres størstedelen af pengene derfor i Apple-aktien.

Hvis korrelationen aftager, f.eks. til nul, bevæger aktierne sig mindre ens. Hvis Apple-aktien falder, er der altså større sandsynlighed for, at Tesla-aktien stiger og dermed udligner noget af Apple-aktiens fald. Det gør det attraktivt at have en større andel af Tesla-aktien i porteføljen. Derfor stiger Teslas optimale porteføljeandel, hvis korrelationen aftager. Jo lavere korrelationen er, desto bedre kan Tesla udligne Apples udsving, og desto mere attraktivt bliver det at have en større andel af Tesla-aktien i porteføljen. Derfor stiger Teslas porteføljeandel, jo lavere korrelationen er. Teslas porteføljeandel er derfor størst ved den laveste korrelation på -0,60.

Opgave 3: Den optimale porteføljes afkast og standardafvigelse

Løsning:

1. De optimale porteføljeandele findes med formelen fra Kapitel 3:

$$p_N = \frac{a_N \cdot \sigma_C^2 - a_C \cdot \sigma_N \cdot \sigma_C \cdot \rho_{NC}}{a_N \cdot \sigma_C^2 + a_C \cdot \sigma_N^2 - (a_N + a_C) \cdot \sigma_N \cdot \sigma_C \cdot \rho_{NC}},$$

her er p_N porteføljeandelen i Novo Nordisk-aktien, a_N og a_C er Novo Nordisk-aktiens og Carlsberg-aktiens forventede afkast, σ_N og σ_C er Novo Nordisk-aktiens og Carlsberg-aktiens standardafvigelser og ρ_{NC} er korrelationen mellem Novo Nordisk-aktien og Carlsberg-aktien.

Tælleren i formelen for den optimale portefølje er:

$$\begin{aligned} a_N \cdot \sigma_C^2 - a_C \cdot \sigma_N \cdot \sigma_C \cdot \rho_{NC} &= 9\% \cdot (10\%)^2 - 4\% \cdot 25\% \cdot 10\% \cdot 0,15 \\ &= 0,09 \cdot (0,10)^2 - 0,04 \cdot 0,25 \cdot 0,10 \cdot 0,15 \\ &= 0,0009 - 0,00015 \\ &= 0,00075. \end{aligned}$$

Nævneren i formelen for den optimale portefølje er:

$$\begin{aligned}
 a_N \cdot \sigma_C^2 + a_C \cdot \sigma_N^2 - (a_N + a_C) \cdot \sigma_N \cdot \sigma_C \cdot \rho_{NC} &= 9\% \cdot (10\%)^2 + 4\% \cdot (25\%)^2 \\
 &\quad - (9\% + 4\%) \cdot 25\% \cdot 10\% \cdot 0,15 \\
 &= 0,09 \cdot (0,10)^2 + 0,04 \cdot (0,25)^2 \\
 &\quad - (0,09 + 0,04) \cdot 0,25 \cdot 0,10 \cdot 0,15 \\
 &= 0,0009 + 0,0025 - 0,0004875 \\
 &= 0,0029125.
 \end{aligned}$$

Den optimale porteføljeandel i Novo Nordisk-aktien er derfor:

$$\begin{aligned}
 p_N &= \frac{0,00075}{0,0029125} \\
 &= 0,2575 \\
 &= 25,75\%.
 \end{aligned}$$

Som beskrevet i Afsnit 2.9 udgør porteføljeandelene tilsammen 100%. Carlsberg-aktiens porteføljeandel findes derfor som:

$$\begin{aligned}
 p_C &= 100\% - 25,75\% \\
 &= 1 - 0,2575 \\
 &= 0,7425 \\
 &= 74,25\%.
 \end{aligned}$$

I den optimale portefølje investeres således 25,75% i Novo Nordisk-aktien og 74,25% i Carlsberg-aktien.

2. Porteføljens forventede afkast beregnes med formelen fra Afsnit 2.9:

$$a_p = p_N \cdot a_N + p_C \cdot a_C,$$

hvor a_p er porteføljens forventede afkast, p_N og p_C er porteføljeandelene i Novo Nordisk-aktien og Carlsberg-aktien, og a_N og a_C er aktiernes forventede afkast.

Ved at indsætte de optimale porteføljeandele fås:

$$\begin{aligned}
 a_p &= 25,75\% \cdot 9\% + 74,25\% \cdot 4\% \\
 &= 0,2575 \cdot 0,09 + 0,7425 \cdot 0,04 \\
 &= 0,02318 + 0,02970 \\
 &= 0,05288 \\
 &= 5,29\%.
 \end{aligned}$$

Porteføljens forventede afkast er derfor 5,29%.

3. Porteføljens standardafvigelse beregnes med formelen fra Afsnit 2.11:

$$\sigma_p = \sqrt{p_N^2 \cdot \sigma_N^2 + p_C^2 \cdot \sigma_C^2 + 2 \cdot p_N \cdot p_C \cdot \sigma_N \cdot \sigma_C \cdot \rho_{NC}},$$

her er σ_p porteføljens standardafvigelse, p_N og p_C er porteføljeandelene i Novo Nordisk-aktien og Carlsberg-aktien, σ_N og σ_C er Novo Nordisk-aktiens og Carlsberg-aktiens

standardafvigelser og ρ_{NC} er korrelationen mellem Novo Nordisk-aktien og Carlsberg-aktien.

Udtrykket under kvadratroden består af tre led. De første to led viser risikoen fra hver af de to aktier, mens det sidste led viser, hvordan aktierne påvirker hinanden gennem korrelationen. Vi beregner nu de tre led hver for sig.

Det første led er:

$$\begin{aligned} p_N^2 \cdot \sigma_N^2 &= (25,75\%)^2 \cdot (25\%)^2 \\ &= (0,2575)^2 \cdot (0,25)^2 \\ &= 0,06631 \cdot 0,0625 \\ &= 0,004144. \end{aligned}$$

Det andet led er:

$$\begin{aligned} p_C^2 \cdot \sigma_C^2 &= (74,25\%)^2 \cdot (10\%)^2 \\ &= (0,7425)^2 \cdot (0,10)^2 \\ &= 0,55131 \cdot 0,01 \\ &= 0,005513. \end{aligned}$$

Det tredje led er:

$$\begin{aligned} 2 \cdot p_N \cdot p_C \cdot \sigma_N \cdot \sigma_C \cdot \rho_{NC} &= 2 \cdot 25,75\% \cdot 74,25\% \cdot 25\% \cdot 10\% \cdot 0,15 \\ &= 2 \cdot 0,2575 \cdot 0,7425 \cdot 0,25 \cdot 0,10 \cdot 0,15 \\ &= 0,001434. \end{aligned}$$

De tre led lægges sammen, og der tages kvadratroden:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sqrt{0,004144 + 0,005513 + 0,001434} \\ &= \sqrt{0,011091} \\ &= 0,1053 \\ &= 10,53\%. \end{aligned}$$

Porteføljens standardafvigelse er derfor 10,53%.

4. Forholdet mellem porteføljens forventede afkast og dens standardafvigelse er:

$$\begin{aligned} \frac{a_p}{\sigma_p} &= \frac{5,29\%}{10,53\%} \\ &= \frac{0,0529}{0,1053} \\ &= 0,5023. \end{aligned}$$

Forholdet mellem porteføljens forventede afkast og dens standardafvigelse er derfor 0,5023.

I den optimale portefølje investeres 25,75% i Novo Nordisk-aktien og 74,25% i Carlsberg-aktien. Porteføljen har et forventet afkast på 5,29%, en standardafvigelse på 10,53% og et forhold mellem porteføljens forventede afkast og dens standardafvigelse på 0,5023.