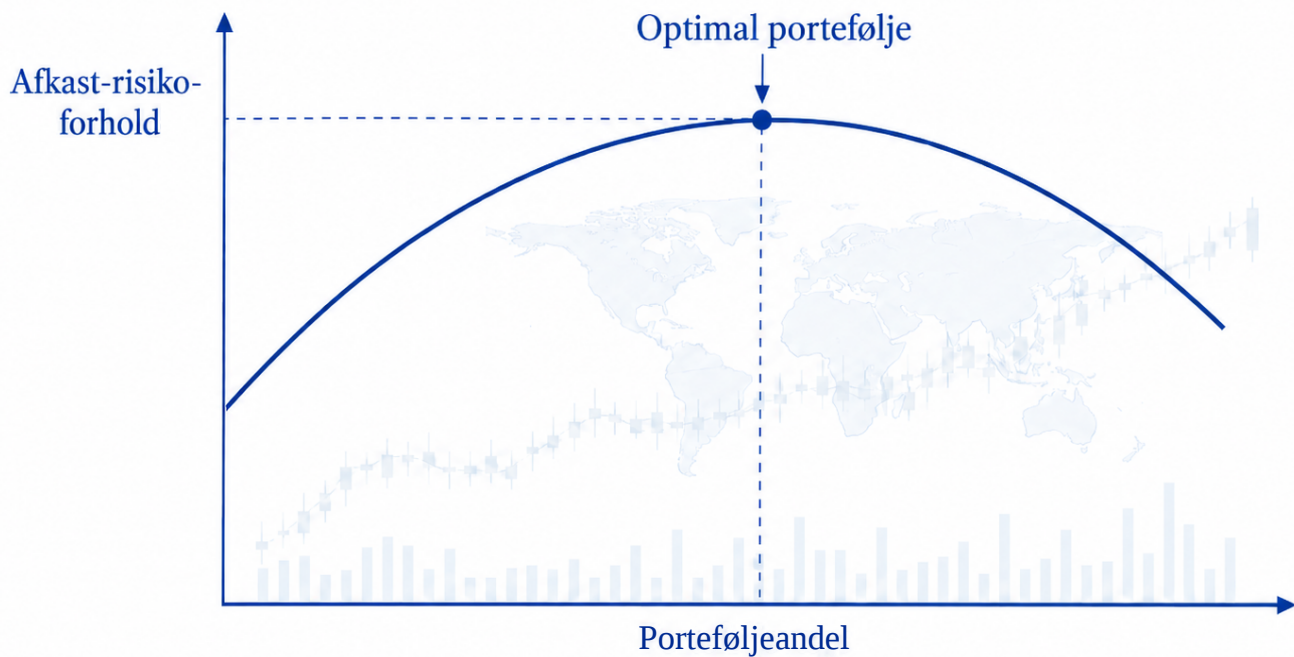




Aktier – teorien bag investering

Teorikompendie med supplerende artikler og videoer

Indhold

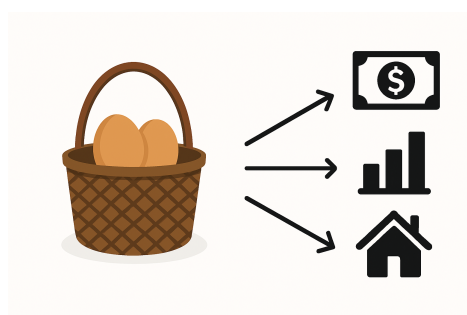
1	Aktier – teorien bag investering	2
2	Afkast og risiko – investeringens to grund søjler	2
3	Den optimale portefølje	16
4	Fra teori til virkelighed: investorens værktøjskasse	17
5	Opgaver	18
6	Mundtlig eksamen	23

1 Aktier – teorien bag investering

Du har sikkert hørt ordsproget: "Man skal ikke lægge alle sine æg i én kurv." Men hvad betyder det egentlig – især når det handler om penge og investering? Forestil dig, at du investerer alle dine penge i én enkelt aktie. Hvis det går godt, kan du tjene mange penge, men hvis det går galt, kan du miste det hele. Ved i stedet at sprede dine penge på flere forskellige aktier, mindsker du risikoen for store tab. Men betyder det så, at du bare skal fordele dine penge ligeligt på tværs af disse aktier? Eller giver det bedre mening at investere mere i nogle aktier og mindre i andre, alt efter hvor risikable – eller lovende – de er?

Det er netop den slags spørgsmål, som teorien bag investering prøver at besvare. Teorien hjælper os med at finde den rette balance mellem risiko og afkast ved at kombinere forskellige aktier på en smart måde. Det handler ikke kun om at finde den "bedste" investering, men om at sammensætte en helhed, hvor de forskellige dele supplerer hinanden og gør din samlede investering mere robust overfor markedernes udsving. Denne måde at tænke på er ikke kun brugbar for privatpersoner, men banker og pensionskasser anvender også teorien til at skræddersy strategier, der både beskytter mod store tab og samtidig giver mulighed for gevinst.

Men hvorfor er det relevant for dig? Uanset om du drømmer om en fremtid i finansverdenen



eller du bare vil spare op til en rejse, en bolig eller en uddannelse, kan investeringsteorien hjælpe dig med at nå dine mål på en mere sikker og gennemtænkt måde. I dette forløb skal vi se nærmere på, hvordan investeringsteorien fungerer, og hvordan du kan bruge den i praksis. Du vil lære om risiko, afkast og hvordan man træffer velovervejede valg, hvilket er værdifulde redskaber for alle, der vil have mere ud af deres penge.

For at få en introduktion til, hvad aktier er, hvorfor aktiemarkedet eksisterer, hvordan aktier handles, og hvorfor det kan være interessant for dig at investere, anbefales det at se de første tre minutter af denne video: [Video 1](#) (se indtil 2:40).

Video 1 (del 1) – Hvorfor findes aktiemarkedet?

Efter at have set den første del af videoen kan det være en god idé at reflektere over, hvorfor vi overhovedet har et aktiemarked. Det er samfundsmæssigt nyttigt at have en mekanisme, der allokerer kapital fra hvor den er i overskud (f.eks. privatpersonernes opsparingskonti) til hvor den skal bruges (f.eks. virksomheder, som skal bruge kapital). Aktiemarkedet fungerer som en slags bro, der forbinder opsparerne med virksomhederne. Når en investor stiller sine penge til rådighed for en virksomhed gennem aktier, forventer han eller hun til gengæld at få noget ud af det, nemlig muligheden for at tjene penge i fremtiden.

2 Afkast og risiko – investeringens to grund søjler

De to vigtigste begreber, når det kommer til investering, er afkast (det du tjener) og risiko (usikkerheden omkring afkastet). For at få en bedre forståelse af afkast og risiko kan du se næste del af videoen: [Video 1](#) (se indtil 9:24).

Video 1 (del 2) – Afkast og risiko

Efter anden del af videoen er det passende at reflektere over betydningen af de to begreber afkast og risiko. Det er klart, at et højt afkast er at foretrække for en investor. Men hvorfor er en lav risiko at foretrække? I eksemplet i videoen ender prisen for aktien med høj risiko samme sted som prisen for aktien med lav risiko. Hvorfor vil vi alligevel foretrække aktien med lav risiko? Der er to ting, som gør sig gældende her: (1) Tid spiller en afgørende rolle. På kort sigt kan aktiekurserne svinge meget op og ned. Hvis man pludselig får brug for sine penge, f.eks. på grund af uforudsete udgifter, risikerer man at skulle sælge netop i en periode, hvor prisen er lav. De store udsving, som kendetegner en aktie med høj risiko, kan derfor føre til et reelt tab, hvis man ikke kan vente på, at priserne stabiliserer sig. På længere sigt kan udsvingene udligne hinanden, men på kort sigt kan de skabe store tab, og det er netop her, at lav risiko bliver en fordel. (2) Samtidig må vi huske, at selvom to aktier i et tænkt eksempel, som i videoen, kan ende på den samme pris, så er fremtiden altid usikker. Det er derfor mere sandsynligt, at en aktie med høj risiko på et tidspunkt vil ende i tab, end at en aktie med lav risiko vil gøre det.

Nu vil vi sætte tal på begreberne afkast og risiko. For at blive en dygtig investor, der træffer velovervejede beslutninger, er det afgørende at kunne *beregne* – eller rettere sagt, *estimere* – både det fremtidige afkast og den tilhørende risiko. Tænk på det, som om du er en meteorolog, der forudsiger vejret, men i stedet for at forudsige vejret forudsiger du aktiernes fremtidige udvikling. Ligesom en meteorolog omhyggeligt studerer historiske vejrdata (temperaturmålinger, nedbørsmængder og vindhastigheder) for at danne et kvalificeret bud på morgendagens vejr, bruger investorer historiske finansielle data til at forudsige, hvordan en aktie vil klare sig i fremtiden.

Det er vigtigt at forstå, at vi ikke forsøger at spå om fremtiden med 100% sikkerhed. Det kan ingen. Aktiemarkedet er påvirket af utallige faktorer – alt fra globale økonomiske tendenser og politiske begivenheder til virksomhedsspecifikke nyheder og enkeltpersoners luner. Derfor er det umuligt at forudsige præcis, hvordan en aktie vil bevæge sig. I stedet for handler det om at bruge de tilgængelige data, primært aktiens historiske udvikling, til at danne os et informeret estimat af, hvordan aktien vil udvikle sig i fremtiden. Vi prøver at finde ud af om en aktie generelt har haft en opadgående trend, og om der er gode grunde til at tro, at denne trend vil fortsætte (eller ændre sig).

2.1 Afkast

For at gøre dette mere håndgribeligt lad os tage udgangspunkt i to populære aktier: Apple og Tesla. Begge selskaber har haft betydelig vækst over de seneste år, men deres kursudviklinger har set meget forskellige ud.

Eksempel: Apple-aktien

Lad os sige, at du kigger på Apple-aktien, og du ser, at den i gennemsnit er steget 15% om året de seneste fem år. Det betyder ikke, at den vil stige 15% næste år, men det giver dig en idé om, hvad der kunne være muligt fremover. Det er som at sige, at det har regnet 10 dage i april de seneste fem år. Det betyder ikke, at det vil regne 10 dage næste april, men det er en god rettesnor.

Eksempel: Tesla-aktien

Forestil dig, at du er interesseret i at investere i Tesla og gerne vil forstå, hvordan aktiens afkast har set ud historisk. Du finder data for de seneste fem år:

År	Startkurs	Slutkurs	Årligt afkast i kr.	Årligt afkast i procent
1	100,00 kr.	120,00 kr.	20,00 kr.	20%
2	120,00 kr.	144,00 kr.	24,00 kr.	20%
3	144,00 kr.	165,60 kr.	21,60 kr.	15%
4	165,60 kr.	190,44 kr.	24,84 kr.	15%
5	190,44 kr.	238,05 kr.	47,61 kr.	25%

Hvad viser tabellen os?

Startkurs og slutkurs: Tabellen viser Tesla-aktiens kurs (dvs. pris) ved årets start og slut.

Årligt afkast i kr.: Afkastet viser, hvor meget man har tjent eller tabt på en investering i løbet af en periode. Det kan måles i kroner og i procent. Afkastet i kroner beregnes som:

$$\text{Afkast i kr.} = \text{Slutkurs i kr.} - \text{Startkurs i kr.}$$

Årligt afkast i procent: Afkastet i procent viser, hvor meget investeringen er steget eller faldet i forhold til det beløb, som man startede med. Det beregnes som:

$$\text{Afkast i pct.} = (\text{Slutkurs i kr.} - \text{Startkurs i kr.}) / \text{Startkurs i kr.}$$

Beregning af det gennemsnitlige afkast: Vi er interesseret i det gennemsnitlige afkast over de fem år:

$$(20\% + 20\% + 15\% + 15\% + 25\%) / 5 = 19\%.$$

Fortolkning af det gennemsnitlige afkast: Over de fem år har Tesla i dette eksempel givet et gennemsnitligt årligt afkast på 19%. Baseret på dette kan man derfor forvente, at aktien også fremover vil give et afkast på omkring 19% om året. Det er dog vigtigt at understrege, at dette *ikke* er en garanti. Den historiske udvikling giver en indikation – ikke en forudsigelse – og fremtiden kan byde på både højere og lavere afkast.

Når vi beregner det gennemsnitlige afkast, bruger vi det som vores bedste bud eller estimat på, hvad aktien vil give i afkast i fremtiden. Vi ved godt, at aktien ikke nødvendigvis vil udvikle sig præcis som tidligere, men det historiske gennemsnit er alligevel et realistisk grundlag, som vi har for at lave vores vurdering af fremtiden.

2.2 Opsummering

Afkast handler om, hvor meget en investering ændrer værdi over tid. Ved at se på årlige prisændringer og beregne de enkelte afkast og derefter deres historiske gennemsnit får vi et tal, der danner et pejlemærke for, hvad vi realistisk kan forvente fremover.

Opgaver om beregning af afkast er i Afsnit 5.1.

2.3 Risiko

Det er ikke tilstrækkeligt blot at kende det gennemsnitlige afkast. Det er også vigtigt at vurdere, hvor stabilt eller ustabilt dette afkast er. Det er her, risiko kommer ind i billedet. Nogle aktier har store udsving i kursen over tid. De kan stige kraftigt i perioder, men også falde markant. Disse aktier indebærer en høj risiko, fordi afkastet er mere uforudsigeligt – der er mulighed for store gevinster, men også for store tab. Andre aktier ændrer sig kun lidt i værdi. De har mindre udsving, hvilket gør afkastet mere stabilt og forudsigeligt. At forstå risiko er afgørende for investeringsbeslutninger, da det hjælper med at afveje potentialet for gevinst mod muligheden for tab.

Når vi skal finde ud af, om en aktie har høj eller lav risiko, kigger vi på, hvor meget aktiens pris svinger over tid. En god måde at forstå dette på er at tænke på aktien som en spiller på et fodboldhold. Forestil dig, at du er træner og skal vælge mellem to spillere, der begge scorer ét mål per kamp i gennemsnit. Den første spiller scorer næsten altid præcist ét mål hver kamp. Nogle gange scorer spilleren to mål, andre gange ingen, men afvigelserne fra gennemsnittet er meget små, og du ved nogenlunde, hvad du kan forvente af spilleren. Den anden spiller er derimod meget uforudsigelig. I én kamp scorer spilleren måske fem mål, og i de næste fire kampe scorer spilleren slet ingen mål. Selvom gennemsnittet for begge spillere er det samme, er den første spiller mere pålidelig.

På samme måde fungerer det med aktier. En aktie med lav risiko er ligesom den stabile spiller. Den holder sig tæt på sit gennemsnitlige afkast. En aktie med høj risiko svarer til den uforudsigelige spiller, da dens afkast svinger voldsomt, både op og ned. For at finde ud af, hvor risikabel en aktie er, ser vi på, hvor meget aktiens afkast afviger fra det gennemsnitlige afkast hvert år. Jo større disse udsving er, jo mere usikkerhed er der, og jo højere er risikoen.

Eksempel: Høj vs. lav risiko

Lad os se på to aktier, "Solskins-aktien" og "Stormvejs-aktien", over 5 år. Begge aktier har et gennemsnitligt afkast på 5%, men se hvor forskellige de individuelle afkast er:

År	1	2	3	4	5
Solskins-aktien	6%	4%	5%	7%	3%
Stormvejs-aktien	20%	-15%	15%	-5%	10%

Gennemsnitligt afkast for Solskins-aktien (lav risiko):

$$\frac{6\% + 4\% + 5\% + 7\% + 3\%}{5} = 5\%.$$

Gennemsnitligt afkast for Stormvejs-aktien (høj risiko):

$$\frac{20\% - 15\% + 15\% - 5\% + 10\%}{5} = 5\%.$$

Læg mærke til, at Solskins-aktien holder sig tæt omkring sit gennemsnit på 5%, mens Stormvejs-aktien svinger meget mere, både over og under. Selvom begge aktier i gennemsnit giver 5% i afkast, er Stormvejs-aktien langt mere risikabel.

2.4 Beregning af risiko

Måske har du en idé om, at en aktie virker "meget risikabel" eller "ret stabil," men mavefornemmelser er svære at sammenligne i praksis. Derfor vil vi gerne *kvantificere* risikoen — altså overføre risikoen fra en fornemmelse til et præcist tal, så vi får et konkret måleredskab. Det svarer til at bruge et termometer i stedet for blot at sige, at vandet er "koldt" eller "varmt". Med ét præcist tal kan du direkte sammenligne risikoen på tværs af forskellige aktier og vælge de investeringer, der passer til dig.

Måden, vi finder tallet på, bygger på den samme idé som fodboldeksemplet: Først beregner vi aktiens gennemsnitlige afkast. Derefter måler vi risikoen ved at undersøge, hvor meget de enkelte års afkast afviger fra gennemsnittet. Lad os se på et konkret eksempel.

Eksempel: Adidas-aktien

Antag, at Adidas-aktiens afkast over de seneste tre år har været:

År	1	2	3
Afkast	20%	15%	22%

1. Først finder vi det gennemsnitlige afkast:

$$\frac{20\% + 15\% + 22\%}{3} = \frac{0,20 + 0,15 + 0,22}{3} = 0,19 = 19\%.$$

Adidas-aktien har altså i gennemsnit givet et afkast på 19% om året.

2. Nu undersøger vi, hvor langt det enkelte års afkast ligger fra gennemsnittet på 19%. Det gør vi ved at trække gennemsnittet fra det enkelte års afkast:

- **År 1:** $20\% - 19\% = 1\%$.
- **År 2:** $15\% - 19\% = -4\%$.
- **År 3:** $22\% - 19\% = 3\%$.

Det er størrelsen af disse afvigelser – altså hvor meget afkastet svinger i forhold til det gennemsnitlige niveau – vi vil samle til ét mål for risiko.

3. Vi kvadrerer disse afvigelser (altså ganger hvert tal med sig selv). Det gør vi, fordi vi ønsker at fjerne de negative fortegn, så positive og negative afvigelser ikke ophæver hinanden. I den blå boks nedenfor kan du læse mere om, hvorfor afvigelserne kvadreres. De kvadrerede afvigelser er:

$$(1\%)^2 = 0,01^2 = 0,0001, \quad (-4\%)^2 = (-0,04)^2 = 0,0016, \quad (3\%)^2 = 0,03^2 = 0,0009.$$

4. Vi beregner gennemsnittet af de kvadrerede afvigelser — men med et lille twist. Selvom vi har 3 års data, dividerer vi nemlig ikke med 3, men med 2. Vi beregner altså ikke et helt almindeligt gennemsnit af afvigelserne, men et såkaldt *justeret gennemsnit* (se brøkens nævner):

$$\frac{0,0001 + 0,0016 + 0,0009}{3 - 1} = \frac{0,0026}{2} = 0,0013.$$

Med "justeret" mener vi, at vi korrigerer beregningen af gennemsnittet ved at trække 1 fra antallet af år. I den røde boks nedenfor kan du læse mere om, hvorfor vi dividerer med 2 i stedet for 3.

5. Til sidst tager vi kvadratroden af (det justerede) gennemsnittet af de kvadrerede afvigelser. Vi tager kvadratroden, fordi vi vil vende tilbage til den oprindelige enhed, efter at vi har kvadreret afvigelserne:

$$\sqrt{0,0013} \approx 0,0361 = 3,61\%.$$

Hvorfor kvadrerer vi afvigelserne?

Forestil dig, at du har tre afkast: ét ligger +5 procentpoint over gennemsnittet, ét ligger –5 procentpoint under gennemsnittet, og det sidste ligger præcis på gennemsnittet. Hvis vi lægger afvigelserne sammen, giver summen nul:

$$+5\% + (-5\%) + 0\% = 0,05 + (-0,05) + 0,00 \\ = 0.$$

Den gennemsnitlige afvigelse bliver derfor også nul:

$$\frac{0}{3} = 0\%.$$

Det ser altså ud, som om afkastene slet ikke varierer omkring gennemsnittet. Men det gør de naturligvis: Det ene afkast ligger 5 procentpoint over gennemsnittet, mens det andet ligger 5 procentpoint under. Problemet er, at positive og negative afvigelser ophæver hinanden, når vi lægger dem sammen. Det skjuler den faktiske variation. For at undgå dette kvadrerer vi afvigelserne. Når man ganger en negativ værdi med sig selv, bliver resultatet positivt:

$$(+5\%)^2 = (0,05)^2 = 0,0025, \\ (-5\%)^2 = (-0,05)^2 = 0,0025, \\ (0\%)^2 = (0,00)^2 = 0,0000.$$

Gennemsnittet af de kvadrerede afvigelser er ikke nul:

$$\frac{0,0025 + 0,0025 + 0}{3} = \frac{0,0050}{3} \approx 0,0017.$$

Ved at kvadrere sørger vi for, at alle udsving – både op og ned – tæller med som noget positivt. På den måde måler vi, hvor meget tallene varierer omkring gennemsnittet.

Tallet 3,61% er Adidas risiko. Det er lige præcis dét tal for risikoen, vi ville regne os frem til. I stedet for blot at have en mavefornemmelse af, at Adidas er "lidt usikker", har vi nu kvantificeret risikoen med et konkret tal. Fortolkningen er: Adidas-aktien giver i gennemsnit 19% i afkast, men det enkelte års afkast vil typisk afvige med omkring 3,61 procentpoint fra dette gennemsnit. Præcis som i fodboldeksemplet fortæller det tal dig, hvor store udsving du skal være forberedt på som investor. Hvis du f.eks. ser, at en anden aktie har en risiko på 6%, ved du med det samme, at denne aktie er mere risikabel end Adidas. Kvantificeringen gør det altså nemt at sammenligne aktier.

Ved risiko dividerer vi med antallet af observationer minus én

Når vi beregner risikoen, dividerer vi ikke med antallet af observationer, som man ellers gør ved et almindeligt gennemsnit. I stedet for dividerer vi med antallet af observationer minus én. Har vi f.eks. data for 3 år svarende til 3 observationer, dividerer vi med 2.

Det er ikke en regnefejl! Statistikere har vist, at denne regel giver et mere præcist mål for risikoen, når vi bruger historiske data til at sige noget om fremtiden. Den præcise matematiske forklaring på, hvorfor dette gælder, springer vi over her. Vigtigt er blot at huske altid at trække én fra antallet af observationer, når der divideres.

Eksempler:

- Med 10 observationer dividerer vi med 9 ($10 - 1 = 9$).
- Med 6 observationer dividerer vi med 5 ($6 - 1 = 5$).
- Med 3 observationer dividerer vi med 2 ($3 - 1 = 2$).

Dette mål for risiko kalder vi aktiens standardafvigelse, og vi angiver det med det græske bogstav σ (sigma). Adidas standardafvigelse er altså $\sigma = 3,61\%$. Standardafvigelsen giver os et præcist tal for, hvor usikkert afkastet er. Jo større tallet er, desto mere svinger afkastet, og desto højere er risikoen. På den måde hjælper standardafvigelsen dig med at sammenligne aktier og vælge de investeringer, der passer bedst til dit temperament og din risikovillighed.

Hvis du vil beregne standardafvigelsen på en hvilken som helst aktie over n år, kan du bruge denne generelle formel:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - a)^2 + (a_2 - a)^2 + \dots + (a_n - a)^2}{n - 1}},$$

hvor $a_1, a_2, \dots, a_n$ er aktiens afkast i de enkelte år, a er det gennemsnitlige afkast, og n er antallet af observationer. Som forklaret i den røde boks dividerer vi med $n - 1$ ved beregning af standardafvigelsen. Denne formel viser præcist det samme som beregningen, som vi lavede med Adidas-aktien, men nu formuleret generelt, så du kan bruge den på enhver aktie.

En høj standardafvigelse betyder, at aktiens afkast svinger meget fra år til år, og at risikoen er høj. En lav standardafvigelse betyder, at aktiens afkast er stabilt og mere forudsigeligt, altså mindre risikabelt. Standardafvigelsen er således et værktøj til at forstå risikoen af aktier. Jo mere du ved om aktiens risiko, desto bedre beslutninger kan du træffe som investor.

2.5 Opsummering

Risiko handler om, at fremtiden er usikker. Vi ved ikke præcis, hvad der vil ske, men vi kan se, hvor meget en aktie har svinget tidligere og bruge det som et mål for, hvor usikker den sandsynligvis vil være fremover. Når vi beregner standardafvigelsen, gør vi risiko til noget, vi kan sætte tal på og forholde os til. Vi kan ikke fjerne usikkerheden, men vi kan forstå og tage højde for den.

Opgaver om beregning af standardafvigelse er i Afsnit 5.2.

Før du læser videre, anbefales det at se resten af videoen fra før: [Video 1](#). Videoklipppet giver en intuitiv gennemgang af, hvorfor det er vigtigt at sprede sine investeringer. Centrale begreber er diversificering samt forskellige strategier til at investere i flere typer aktier, så de kan supplere og understøtte hinanden.

Video 1 (del 3) – Diversificering

Efter at have set videoen er det en god idé at stoppe op og tænke over, hvad "diversificering" egentlig betyder. Kort sagt handler diversificering om at sprede sine investeringer på flere forskellige aktier i stedet for at satse på én eller få. Forestil dig, at du vil investere dine egne penge. Ville du satse på én bestemt aktie, som du har størst tiltro til? Eller ville du fordele pengene på flere forskellige aktier? Mange private investorer vælger ofte den første løsning. De føler sig trygge ved nogle få virksomheder, fordi de f.eks. har en god mavefornemmelse eller har læst lidt om netop disse aktier. Det kan også skyldes, at de synes, diversificering virker en smule "kedelig" sammenlignet med at satse stort på én enkelt aktie. Men som vi vil illustrere nedenfor, er diversificering en af de mest effektive metoder til at opnå et højt afkast med lav risiko.

2.6 Korrelation

Når du investerer dine penge i mere end én aktie, kalder man det for en *aktieportefølje* – eller bare en *portefølje*. Formålet med en portefølje er at maksimere dit afkast, men samtidig at minimere risikoen for store tab. Hvis du kun investerer i én aktie, er du meget sårbar. Et markant fald i denne ene aktie kan medføre et stort tab. Derfor er det en smart idé at investere i flere aktier, så risikoen bliver spredt ud over flere aktier.

Eksempel: SAS-aktien

SAS-aktien er et konkret eksempel fra den virkelige verden, der illustrerer risikoen ved kun at investere i én aktie. Du kan læse mere om SAS-eksemplet i følgende nyhedsartikel: [Artikel fra TV2](#).

For at udnytte fordelene ved diversificering er det vigtigt at forstå, hvordan to aktiers afkast bevæger sig i forhold til hinanden. Det kaldes korrelation. Korrelation beskriver, om to ting bevæger sig i samme retning (positiv korrelation), modsat retning (negativ korrelation) eller tilfældigt i forhold til hinanden (ingen korrelation).

Forestil dig to børn, der gynger ved siden af hinanden på en legeplads. Hvis begge børn gynger frem og tilbage i samme takt – altså fremad og tilbage samtidig – siger vi, at deres bevægelser har en *positiv korrelation*. På samme måde er to aktier *positivt korrelerede*, hvis de typisk bevæger sig i samme retning: Når én aktie stiger, så stiger den anden også.

Forestil dig nu, at det ene barn gynger fremad, mens det andet gynger bagud. Når det ene barn er på vej op, er det andet barn på vej ned. Her siger vi, at deres bevægelser har en *negativ korrelation*. På aktiemarkedet betyder en negativ korrelation, når én aktie stiger, falder den anden aktie. De bevæger sig altså i modsatte retninger.

Til sidst kan vi forestille os to børn, der gynger helt uden hensyn til hinanden. De bevæger sig hverken synkront eller modsat, men fuldstændigt tilfældigt. Her siger vi, at korrelationen er nul. På samme måde betyder en korrelation på nul på aktiemarkedet, at to aktier ikke bevæger sig på

nogen fast måde i forhold til hinanden.

2.7 Hvorfor betyder korrelation noget for dine investeringer?

Hvis du investerer i flere forskellige aktier, som typisk bevæger sig på samme måde (altså har en positiv korrelation), betyder det, at når én aktie falder, vil de andre sandsynligvis også falde. Dermed kan du hurtigt miste mange penge på én gang, fordi dine investeringer er samlet i aktier, der reagerer ens på ændringer i markedet.

På den anden side kan du vælge aktier, der bevæger sig forskelligt, dvs. at nogle stiger, når andre falder (negativ korrelation). Dermed kan du mindske risikoen for at opleve store tab samtidig. Det er nøglen til at beskytte din samlede investering mod store nedture på aktiemarkedet.

Eksempel: Flyselskab og olieselskab

Forestil dig, at du investerer alle dine penge i to forskellige flyselskaber (f.eks. SAS og Lufthansa). De har en høj positiv korrelation, fordi begge påvirkes af stort set de samme faktorer. Hvis f.eks. olieprisen pludselig stiger voldsomt, bliver flybrændstof dyrere, hvilket betyder øgede omkostninger og lavere overskud for begge selskaber. Aktiekurserne vil derfor typisk falde samtidig, og du taber penge på begge aktier på én gang.

Hvis du derimod investerer dine penge både i et flyselskab (f.eks. Lufthansa) og i et olieselskab (f.eks. ExxonMobil), har du valgt to aktier med en negativ korrelation. Det skyldes, at det, der er dårligt for flyselskabet (høj oliepris), ofte er godt for olieselskabet (som tjener mere ved højere oliepriser). I det tilfælde vil en høj oliepris betyde, at Lufthansa-aktien falder, men ExxonMobil-aktien stiger, og på den måde modvirker de hinandens udsving. Det betyder, at du undgår store tab på én gang, og du får en mere stabil og sikker investering samlet set.

Eksempel: Apple og Tesla

Lad os se på følgende årlige afkast i procent for Apple og Tesla over tre år:

År	1	2	3
Apple	10%	5%	-2%
Tesla	8%	4%	-3%

Vi ser, at aktierne bevæger sig meget ens. De stiger eller falder typisk samtidig. Det betyder, at Apple og Tesla har en positiv korrelation.

Når korrelation beregnes, anvendes en matematisk formel, der bruger historiske data fra aktierne. Denne formel måler præcist, om aktierne typisk bevæger sig i samme retning (positiv korrelation), i modsat retning (negativ korrelation), eller om de slet ikke følger hinanden (ingen korrelation). Korrelationen er et tal mellem -1 og 1 . Jo tættere tallet er på 1 , jo stærkere er den positive korrelation. Jo tættere tallet er på -1 , desto stærkere er den negative korrelation. Et tal tæt på 0 viser, at aktierne bevæger sig tilfældigt og uafhængigt af hinanden.

En korrelation på f.eks. $0,5$ betyder, at aktierne *ofte*, men ikke altid, bevæger sig i samme retning. Hvis den ene aktie stiger i pris, er der derfor en god chance for, at den anden også stiger. Det

svarer til, at to børn gynger næsten i takt, men ikke helt perfekt. Nogle gange rammer de hinandens rytme, og andre gange gør de ikke.

Eksempel: Tech-branchen

Læs følgende artikel om en fremtidsanalytiker: [Artikel fra Børsen](#). Før du læser svaret nedenfor: Brug din viden om korrelationen til at vurdere, hvordan aktier fra den samme branche påvirker den samlede porteføljerisiko, og evaluer på den baggrund fremtidsanalytikerens investeringsstrategi.

Svar

I artiklen fortæller fremtidsanalytikeren, at hun gerne vil købe aktier fra flere virksomheder fra tech-branchen,¹ fordi det er en branche, som hun kender godt. Det kan umiddelbart virke fornuftigt, men hun overser en vigtig pointe. Aktier fra samme branche har ofte tendens til at bevæge sig i samme retning.

Hvis elpriserne f.eks. stiger kraftigt, bliver det dyrere for tech-virksomheder at drive deres store datacentre. Det kan presse virksomhedernes overskud ned. Fordi tech-firmaer ligner hinanden meget, reagerer deres aktier ofte på nøjagtig samme måde på nyheder og har derfor en høj, positiv korrelation. Ejer du kun tech-aktier, spreder du altså ikke din risiko ret godt. Falder den ene aktie på grund af høje elpriser, falder de andre sandsynligvis også. Hvis du vil passe bedre på dine penge, bør du i stedet vælge aktier fra forskellige brancher. Du kan for eksempel kombinere en tech-aktie med en aktie fra energi-branchen som Ørsted. Stiger elprisen, falder tech-aktierne, fordi deres udgifter stiger. Til gengæld kan Ørsted tjene mere på de høje priser, så deres aktie stiger. Når den ene falder, stiger den anden. På den måde skaber du balance i din investering og mindsker din samlede risiko.

2.8 Opsummering

Når vi ser på korrelationen, prøver vi at forstå, hvordan to aktier bevæger sig i forhold til hinanden. Dette hjælper os med at sammensætte bedre porteføljer, der kan modstå udsving i markedet. Korrelationen giver os altså et vigtigt redskab til at sprede vores risiko og træffe smartere investeringsbeslutninger.

2.9 Porteføljeafkast for to aktier

At investere i en portefølje kan sammenlignes med at sprede sine æg ud i flere kurve i stedet for at lægge dem alle i én. Målet er at sprede risikoen og samtidig at opnå et godt samlet afkast. I dette afsnit ser vi på en portefølje bestående af to aktier og stiller spørgsmålet: Hvordan finder man ud af, hvor meget man kan forvente at tjene på sin portefølje?

Forestil dig, at du har sparet nogle penge op og beslutter dig for at købe aktier fra to virksomheder: Microsoft og Novo Nordisk. Antag, at de to aktier har forskellige forventede afkast. Når du

¹Tech-branchen (eller teknologibranchen) dækker over virksomheder, der udvikler eller bruger teknologi som en central del af deres forretning. Det kan f.eks. være firmaer, der laver software, computere, mobiltelefoner, internetjenester eller digitale platforme. Kendte eksempler er Apple, Microsoft, Alphabet (tidligere Google) og Meta (tidligere Facebook).

lægger dine penge i begge aktier, er det naturligt at spørge: Hvor meget kan jeg forvente at tjene samlet set? For at kunne svare på det spørgsmål skal du kende to ting.

For det første skal du vide, hvor stor en porteføljeandel af dine penge du har placeret i hver af de to aktier. Hvis du f.eks. har investeret halvdelen af dine penge i Microsoft og halvdelen i Novo Nordisk, har aktierne lige store porteføljeandele, altså 50% hver. Hvis du derimod har lagt 70% i Microsoft og kun 30% i Novo Nordisk, har Microsoft en større porteføljeandel og dermed større betydning for porteføljens samlede forventede afkast. Bemærk, at vi udtrykker porteføljeandelene i procent i stedet for i kroner og øre. Dette gør det muligt at se bort fra selve investeringens størrelse, så formlerne gælder, uanset om du investerer 1.000 kr. eller 100.000 kr.

Antag f.eks., at du investerer 7.000 kr. i Microsoft og 3.000 kr. i Novo Nordisk. Den samlede investering er dermed 10.000 kr. Porteføljeandelen i Microsoft er derfor:

$$\frac{7.000 \text{ kr.}}{10.000 \text{ kr.}} = 0,70 = 70\%,$$

mens porteføljeandelen i Novo Nordisk er

$$\frac{3.000 \text{ kr.}}{10.000 \text{ kr.}} = 0,30 = 30\%.$$

Generelt kan porteføljeandelen for den enkelte aktie beregnes sådan:

$$p_i = \frac{\text{investering i aktie } i}{\text{samlet investering}},$$

hvor p_i er porteføljeandelen for Aktie i . Senere i forløbet skal vi se på, hvordan man vælger de optimale porteføljeandele.

For det andet skal du vide, hvilket afkast du kan forvente, at hver aktie vil give over en bestemt periode, f.eks. et år. Disse forventede afkast har vi allerede arbejdet med tidligere, da vi så på, hvordan man kan beregne det forventede afkast for en enkelt aktie baseret på historiske data.

Når du har de oplysninger, kan du beregne porteføljeafkastet ved at tage en slags gennemsnit, men ikke et helt almindeligt gennemsnit. Du tager nemlig hensyn til, hvor meget du har investeret i hver aktie. Det betyder, at den aktie, du har investeret mest i, også får størst indflydelse på det samlede afkast.

Eksempel 1: Portefølje

Lad os sige, at du investerer 60% af dine penge i Apple og 40% i Tesla, og du forventer, at Apple vil give et afkast på 10% om året, og at Tesla vil give 5%. For at finde det forventede porteføljeafkast ganger du hver akties afkast med den andel, som du har investeret i den, og så lægger du de to tal sammen:

$$\begin{aligned} \text{Forventet porteføljeafkast} &= (0,60 \cdot 10\%) + (0,40 \cdot 5\%) \\ &= 6\% + 2\% \\ &= 8\%. \end{aligned}$$

Det betyder, hvis alt går som forventet, at du vil tjene 8% på din samlede investering efter et år. Har du f.eks. investeret 10.000 kr., kan du forvente at tjene 800 kr. efter et år.

Eksempel 2: Portefølje

Hvad sker der, hvis du ændrer porteføljefordelingen og i stedet investerer 30% i Apple og 70% i Tesla? Så skal vi lave samme beregning med de nye porteføljeandele:

$$\begin{aligned}\text{Forventet porteføljeafkast} &= (0,30 \cdot 10\%) + (0,70 \cdot 5\%) \\ &= 3\% + 3,5\% \\ &= 6,5\%.\end{aligned}$$

Nu er det samlede forventede afkast 6,5%. Det er lavere end i det første eksempel, og det skyldes, at du har flyttet en større del af dine penge over til Tesla, som har et lavere forventet afkast end Apple.

Dette viser noget vigtigt: Når du ændrer porteføljeandelene, ændrer du også det samlede afkast, som du kan forvente. Jo mere du investerer i en bestemt aktie, jo større indflydelse har den på porteføljens samlede afkast.

Generelt gælder det, at det forventede afkast for en portefølje bestående af to aktier beregnes som:

$$\text{Forventet porteføljeafkast} = p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2,$$

hvor p_1 og p_2 er porteføljeandelene af den samlede investering i henholdsvis Aktie 1 og Aktie 2, og a_1 og a_2 er de forventede afkast af de to aktier. Læg mærke til, at porteføljeandelene skal summere til 1 (eller 100%):

$$p_1 + p_2 = 1.$$

Hvis du f.eks. investerer 70% i én aktie, skal du investere 30% i den anden aktie. Hele din investering skal jo fordeles mellem de to aktier.

2.10 Opsummering

Porteføljeafkast handler om at finde det samlede forventede afkast, når du spreder dine penge mellem to aktier. Du ganger hver akties forventede afkast med dens porteføljeandel og summerer resultaterne. På den måde får du ét tal, der viser, hvor meget du i gennemsnit kan forvente at tjene på hele din portefølje, og du kan se, hvordan ændringer i porteføljeandelene (f.eks. 60/40 vs. 30/70) påvirker det samlede afkast.

Opgaver om beregning af porteføljeafkast er i Afsnit 5.3.

2.11 Porteføljerisiko for to aktier

Nu skal vi se nærmere på, hvordan vi finder risikoen af en portefølje, som består af to aktier. Tidligere har vi talt om risikoen for én enkelt aktie, f.eks. Apple eller Tesla. Men hvad sker der med risikoen, hvis vi investerer i to aktier samtidig?

Forestil dig, at du investerer dine penge i både Apple og Tesla. Din samlede risiko afhænger selvfølgelig stadig af risikoen af hver enkelt akties risiko. Hvis Apple er en aktie med lav risiko

og Tesla er en aktie med høj risiko, vil risikoen i din samlede portefølje afhænge af, hvor meget du har investeret i hver aktie. Hvis du investerer en større del i Tesla, vil porteføljens risiko bevæge sig i retning af Teslas højere risiko. Omvendt, hvis du har mest i Apple, vil risikoen trække i retning af Apples lave risiko.

Men ud over, hvor mange penge du investerer i hver aktie, er der en anden vigtig faktor, som du skal være opmærksom på: hvordan aktierne bevæger sig i forhold til hinanden. Det er netop det, som vi tidligere har kaldt aktiernes korrelation, altså om de typisk bevæger sig i samme eller i modsatte retninger.

Porteføljens risiko afhænger derfor ikke kun af, hvor meget Apple-aktien og Tesla-aktien hver især svinger, men også af, hvordan de svinger i forhold til hinanden. Hvis de ofte bevæger sig i modsatte retninger – når den ene stiger, falder den anden – dvs. de har en negativ korrelation, kan de til en vis grad udligne hinanden. Man kan sige, at aktierne beskytter hinanden, og det mindsker porteføljens samlede risiko. Omvendt vil aktier med en positiv korrelation ofte stige og falde samtidig. I så fald udligner de ikke hinandens udsving, og porteføljens risiko forbliver høj.

Når du skal finde ud af, hvor høj risikoen i en portefølje med to aktier er, skal du derfor først se på de enkelte aktiers risici. Derefter skal du se på korrelationen mellem aktierne. Selve beregningen af porteføljens samlede risiko bygger præcis på denne intuition. Formlen afhænger direkte af, hvor meget de enkelte aktier svinger hver især, men den afhænger også af, hvordan svingningerne spiller sammen. Jo mere negativ korrelationen er, desto bedre kan aktierne beskytte hinanden, og desto lavere bliver porteføljens risiko. Jo mere positiv korrelationen er, desto mere følges aktierne ad, og desto højere bliver porteføljens risiko.

Porteføljens risiko kaldes porteføljens standardafvigelse og beregnes ud fra følgende formel:

$$\sigma_p = \sqrt{p_1^2 \cdot \sigma_1^2 + p_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}}.$$

Lad os diskutere denne formel trin for trin:

- σ_p er porteføljens risiko (standardafvigelse); altså dét, som vi gerne vil finde.
- p_1 og p_2 er porteføljeandelene, som investeres i Aktie 1 og Aktie 2.
- σ_1 og σ_2 er Aktie 1's og Aktie 2's risiko (standardafvigelse).
- ρ_{12} er korrelationen mellem Aktie 1 og Aktie 2.

Eksempel 1: Porteføljerisiko

Lad os kigge på et eksempel for at gøre det helt klart. Forestil dig, at du investerer halvdelen af dine penge i Apple-aktien og halvdelen i Tesla-aktien. Apple-aktien har en standardafvigelse på 10%, mens Tesla-aktien har en højere standardafvigelse på 20%, og korrelationen mellem aktiernes afkast er 0,5. Husk, at en korrelation på 1 betyder, at aktiernes afkast altid bevæger sig i samme retning. En korrelation på 0,5 betyder, at afkastene ofte bevæger sig i samme retning, men ikke altid. Formlen for porteføljens standardafvigelse er:

$$\sigma_p = \sqrt{p_1^2 \cdot \sigma_1^2 + p_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}}.$$

Med værdierne $p_1 = 0,5$, $p_2 = 0,5$, $\sigma_1 = 0,1$, $\sigma_2 = 0,2$ og $\rho_{12} = 0,5$ bliver den således:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{(0,5^2 \cdot 0,1^2) + (0,5^2 \cdot 0,2^2) + (2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,5)} \\ &= \sqrt{(0,25 \cdot 0,01) + (0,25 \cdot 0,04) + (2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,5)} \\ &= \sqrt{0,0025 + 0,01 + 0,005} \\ &= \sqrt{0,0175} \\ &= 0,1323 \\ &= 13,23\%.\end{aligned}$$

Porteføljens risiko er altså 13,23%. Det betyder, at den ligger mellem Apples risiko (10%) og Teslas risiko (20%).

Eksempel 2: Porteføljerisiko

Lad os nu betragte det samme eksempel, men antag, at korrelationen er $-0,5$. Det betyder, at den ene akties afkast ofte stiger, når den andens falder, men ikke altid. Værdierne er derfor $p_1 = 0,5$, $p_2 = 0,5$, $\sigma_1 = 0,1$, $\sigma_2 = 0,2$ og $\rho_{12} = -0,5$. Så standardafvigelsen bliver:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{(0,5^2 \cdot 0,1^2) + (0,5^2 \cdot 0,2^2) + (2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,2 \cdot (-0,5))} \\ &= \sqrt{(0,25 \cdot 0,01) + (0,25 \cdot 0,04) + (2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,2 \cdot (-0,5))} \\ &= \sqrt{0,0025 + 0,01 - 0,005} \\ &= \sqrt{0,0075} \\ &= 0,0866 \\ &= 8,66\%.\end{aligned}$$

Porteføljens risiko er altså faldet til 8,66%. Det er lavere end risikoen af hver enkelt aktie (10% og 20%). Det skyldes netop den negative korrelation. Fordi de to aktier ofte bevæger sig modsat hinanden, beskytter de hinanden mod store fælles tab. Ved at investere i begge aktier falder den samlede risiko altså markant.

De to eksempler viser, hvilken forskel korrelationen mellem aktier kan gøre for risikoen i en portefølje. I begge eksempler er Apples standardafvigelse 10%, Teslas standardafvigelse 20%, og porteføljeandelene er de samme. Det eneste, der ændrer sig, er korrelationen. Med en positiv korrelation på 0,5 bliver porteføljens standardafvigelse 13,23%, fordi aktierne ofte bevæger sig i samme retning og dermed ikke beskytter hinanden særlig godt. Med en negativ korrelation på $-0,5$ falder porteføljens standardafvigelse til 8,66%, fordi aktierne ofte bevæger sig i modsatte retninger og dermed kan udligne hinandens udsving. Det er en markant forskel, som tydeligt illustrerer, hvor stor en betydning korrelationen har for porteføljens samlede risiko.

2.12 Opsummering

Porteføljerisiko er den samlede usikkerhed, som du står med, når du spreder dine penge på to aktier. Den afhænger af de enkelte aktiers standardafvigelser, porteføljeandelene og korrelationen mellem aktiernes afkast. En lav korrelation giver en lav standardafvigelse for porteføljen.

Opgaver om beregning af porteføljerisiko er i Afsnit 5.4.

3 Den optimale portefølje

For at få mest muligt ud af det næste kapitel anbefales det at se denne video: [Video 2](#).

I videoen arbejdes med spørgsmålet om, hvordan man finder den optimale portefølje. Vi så, at vi kan finde den optimale portefølje ved at kigge på en graf, der viser afkast-risiko-forholdet for forskellige kombinationer af to aktier, og finde det punkt, hvor grafen har sit toppunkt. Baseret på aktierne Microsoft og Vestas så vi, at den optimale portefølje består af 42% Microsoft og 58% Vestas. Det betyder, hvis man har 10.000 kr., at man skal investere 4.200 kr. i Microsoft og 5.800 kr. i Vestas for at få den bedst mulige balance mellem afkast og risiko.

Det er faktisk ikke kun ved hjælp af en graf, at man kan finde den optimale portefølje for Microsoft og Vestas. Der findes også en formel, der gør det muligt at regne sig frem til den optimale porteføljefordeling mellem de to aktier. Hvis vi lader p_M repræsentere porteføljeandelen i Microsoft og p_V porteføljeandelen i Vestas, ser formelen således ud:

$$p_M = \frac{a_M \cdot \sigma_V^2 - a_V \cdot \sigma_M \cdot \sigma_V \cdot \rho_{MV}}{a_M \cdot \sigma_V^2 + a_V \cdot \sigma_M^2 - (a_M + a_V) \cdot \sigma_M \cdot \sigma_V \cdot \rho_{MV}},$$

$$p_V = 1 - p_M,$$

hvor a_M og a_V er de forventede afkast af Microsoft og Vestas, σ_M og σ_V er Microsofts og Vestas standardafvigelser og ρ_{MV} er korrelationen mellem Microsoft og Vesta.

For at illustrere, hvordan formelen bruges, lad os bruge værdierne for Microsoft og Vestas fra eksemplet fra videoen:

$$a_M = 0,09, \quad a_V = 0,06, \quad \sigma_M = 0,35, \quad \sigma_V = 0,25, \quad \rho_{MV} = -0,4.$$

Vi indsætter værdierne i formelen og finder Microsofts porteføljeandel:

$$p_M = \frac{0,09 \cdot (0,25)^2 - 0,06 \cdot 0,35 \cdot 0,25 \cdot (-0,4)}{0,09 \cdot (0,25)^2 + 0,06 \cdot (0,35)^2 - (0,09 + 0,06) \cdot 0,35 \cdot 0,25 \cdot (-0,4)}$$

$$= 0,42.$$

Herefter beregner vi Vestas porteføljeandel:

$$p_V = 1 - p_M$$

$$= 1 - 0,42$$

$$= 0,58,$$

hvilket netop svarer til vores grafiske løsning: 42% i Microsoft og 58% i Vestas.

Formlen kan også skrives i en mere generel version, der gælder for alle porteføljer bestående af to aktier. Det kan være hvilke som helst to virksomheder, som du ønsker at investere i. Lad os kalde dem Aktie 1 og Aktie 2. Den generelle formel ser således ud:

$$p_1 = \frac{a_1 \cdot \sigma_2^2 - a_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}}{a_1 \cdot \sigma_2^2 + a_2 \cdot \sigma_1^2 - (a_1 + a_2) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}},$$

$$p_2 = 1 - p_1,$$

hvor p_1 og p_2 er porteføljeandelene i Aktie 1 og Aktie 2, a_1 og a_2 er Aktie 1's og Aktie 2's forventede afkast, σ_1 og σ_2 er Aktie 1's og Aktie 2's standardafvigelser og ρ_{12} er korrelationen mellem Aktie 1 og Aktie 2.

Denne formel giver dig altså mulighed for at finde den optimale porteføljefordeling mellem to vilkårlige aktier, uanset om det er Microsoft og Vestas, Novo Nordisk og Mærsk eller to helt andre virksomheder.

3.1 Opsummering

Den optimale portefølje er den sammensætning af to aktier, der giver den bedste balance mellem afkast og risiko. Den kan både bestemmes grafisk og beregnes via en formel. Derved får man de porteføljeandele, der giver det bedste forhold mellem afkast og risiko.

Opgaver om beregning af den optimale portefølje er i Afsnit 5.5.

4 Fra teori til virkelighed: investorens værktøjskasse

Du har nu lukket op for finansverdenens vigtigste værktøjskasse og lært at mestre tre afgørende byggeklodser: *afkastet*, der ud fra historien giver et kvalificeret bud på fremtidens gevinst; *standardafvigelsen*, der giver et mål for usikkerheden og markedets svingninger; og *korrelationen*, der viser samspillet mellem aktierne, og om de kan beskytte hinanden.

Dermed kan vi vende tilbage til spørgsmålet fra starten: "Skal man lægge alle sine æg i én kurv?" – et spørgsmål, som du nu kan besvare med matematikken på din side i stedet for blot at bruge mavefornemmelser. Effektiv investering handler ikke om tilfældig spredning eller jagten på en enkelt vinderaktie. Det handler om at sammensætte aktier, der supplerer hinanden, så man opnår det bedst mulige forhold mellem forventet afkast og risiko.

5 Opgaver

5.1 Afkast

Opgave 1: Årligt afkast

En aktie koster 100 kr. ved årets start, og ved årets slutning koster den 112 kr.

1. Hvad er afkastet i kroner?
2. Hvad er afkastet i procent?

Opgave 2: Gennemsnitligt årligt afkast

En akties afkast over tre år er:

- År 1: 8%,
- år 2: -3%,
- år 3: 10%.

Hvad er det gennemsnitlige årlige afkast?

Opgave 3: Find slutkurs ud fra afkast i procent

En aktie koster 80 kr. ved årets start. Aktiens afkast i procent for året er 15%.

1. Hvad er afkastet i kroner?
2. Hvad er slutkursen?

5.2 Standardafvigelse

Opgave 1: Standardafvigelse

En akties afkast over tre år er:

- År 1: 5%,
- år 2: 2%,
- år 3: 8%.

Beregn standardafvigelsen på aktiens afkast.

Opgave 2: Standardafvigelse – med negativt afkast

En akties afkast over fire år er:

- År 1: 10%,
- år 2: -4%,
- år 3: 6%,
- år 4: 2%.

Beregn standardafvigelsen på aktiens afkast.

Opgave 3: Standardafvigelse – sammenligning

Aktie A og Aktie B har følgende afkast over fem år. Hvilken aktie har størst standardafvigelse?

- Aktie A: 2%, 4%, 6%, 8%, 10%,
- Aktie B: 5%, 0%, 5%, 10%, 15%.

5.3 Porteføljeafkast**Opgave 1: Beregning af porteføljeafkast**

Antag, at du har sparet penge op, som du vil investere i to aktier:

- Du investerer 40% af beløbet i Aktie A, som du forventer vil give 8% i afkast.
- Du investerer 60% af beløbet i Aktie B, som du forventer vil give 12% i afkast.

Beregn det samlede forventede afkast for din portefølje.

Opgave 2: To fordelinger – hvilken giver højest forventet afkast?

Du kan investere i to aktier med følgende forventede afkast:

- Aktie A: 9%,
- Aktie B: 4%.

1. Beregn det forventede porteføljeafkast, hvis du investerer 70% i Aktie A og 30% i Aktie B.
2. Beregn det forventede porteføljeafkast, hvis du investerer 40% i Aktie A og 60% i Aktie B.
3. Giver fordelingen mellem Aktie A og Aktie B fra delopgave 1 eller delopgave 2 et højere forventet afkast, og hvor mange procentpoint er forskellen?

Opgave 3: Find porteføljeandelen ud fra et ønsket porteføljeafkast

Du ønsker at investere dine penge i en portefølje, der består af to aktier. Aktie A har et forventet afkast på 10%, mens Aktie B har et forventet afkast på 4%, og du ønsker, at porteføljen samlet set skal have et forventet afkast på 8%.

1. Hvor stor en porteføljeandel skal du investere i Aktie A?

2. Hvor stor en porteføljeandel skal du investere i Aktie B?

Opgave 4: Fra kroner til porteføljeandele og porteføljeafkast

Du investerer i to aktier: 8.000 kr. i Aktie A, som har et forventet afkast på 6%, og 12.000 kr. i Aktie B, som har et forventet afkast på 11%.

1. Hvad er porteføljeandelene (i %) for Aktie A og Aktie B?
2. Beregn det samlede forventede porteføljeafkast.

5.4 Porteføljens standardafvigelse

Opgave 1: Beregning af porteføljens standardafvigelse

Antag, at du har sparet penge op, som du vil investere i to aktier med følgende egenskaber:

- Aktie 1 har en standardafvigelse på $\sigma_1 = 15\%$,
- Aktie 2 har en standardafvigelse på $\sigma_2 = 10\%$,
- porteføljeandelen i Aktie 1 er $p_1 = 50\%$,
- porteføljeandelen i Aktie 2 er $p_2 = 50\%$,
- korrelationen mellem de to aktiers afkast er $\rho_{12} = 0,20$.

Brug formelen for porteføljens standardafvigelse fra Afsnit 2.11 til at beregne porteføljens standardafvigelse:

$$\sigma_p = \sqrt{p_1^2 \cdot \sigma_1^2 + p_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}},$$

her er σ_p porteføljens standardafvigelse, p_1 og p_2 er porteføljeandelene i Aktie 1 og Aktie 2, σ_1 og σ_2 er Aktie 1's og Aktie 2's standardafvigelser og ρ_{12} er korrelationen mellem Aktie 1 og Aktie 2.

Opgave 2: Beregning af porteføljens standardafvigelse

Antag, at du investerer i en portefølje bestående af to aktier med følgende egenskaber:

- Aktie 1 har en standardafvigelse på $\sigma_1 = 18\%$,
- Aktie 2 har en standardafvigelse på $\sigma_2 = 12\%$,
- porteføljeandelen i Aktie 1 er $p_1 = 60\%$,
- porteføljeandelen i Aktie 2 er $p_2 = 40\%$,
- korrelationen mellem de to aktiers afkast er $\rho_{12} = 0,25$.

Beregn porteføljens standardafvigelse σ_p .

Opgave 3: Ændring i porteføljeandele

Antag, at du investerer i en portefølje bestående af to aktier med følgende egenskaber:

- Aktie 1 har en standardafvigelse på $\sigma_1 = 25\%$,

- Aktie 2 har en standardafvigelse på $\sigma_2 = 10\%$,
 - korrelationen mellem de to aktiers afkast er $\rho_{12} = 0$.
1. Beregn porteføljens standardafvigelse, hvis porteføljeandelen i Aktie 1 er $p_1 = 20\%$.
 2. Beregn porteføljens standardafvigelse, hvis porteføljeandelen i Aktie 1 er $p_1 = 80\%$.
 3. Sammenlign de to resultater, og forklar, hvad de viser om porteføljeandelens betydning for porteføljens standardafvigelse.

Opgave 4: Porteføljens standardafvigelse og diversifikation

Antag, at du investerer i en portefølje bestående af to aktier med følgende egenskaber:

- Aktie 1 har en standardafvigelse på $\sigma_1 = 22\%$,
 - Aktie 2 har en standardafvigelse på $\sigma_2 = 14\%$,
 - porteføljeandelen i Aktie 1 er $p_1 = 75\%$,
 - porteføljeandelen i Aktie 2 er $p_2 = 25\%$,
 - korrelationen mellem de to aktiers afkast er $\rho_{12} = -0,90$.
1. Beregn porteføljens standardafvigelse σ_p .
 2. Sammenlign resultatet med standardafvigelserne for de to enkeltaktier.

5.5 Den optimale portefølje

Opgave 1: Find den optimale portefølje

Antag, at du kan vælge mellem følgende to aktier:

- Amazon-aktien har et forventet afkast på $a_A = 8\%$ og en standardafvigelse på $\sigma_A = 20\%$.
 - Siemens-aktien har et forventet afkast på $a_S = 5\%$ og en standardafvigelse på $\sigma_S = 15\%$.
 - Korrelationen mellem de to aktiers afkast er $\rho_{AS} = 0,30$.
1. Brug formelen for den optimale portefølje fra Kapitel 3 til at finde porteføljeandelen i Amazon-aktien:

$$p_A = \frac{a_A \cdot \sigma_S^2 - a_S \cdot \sigma_A \cdot \sigma_S \cdot \rho_{AS}}{a_A \cdot \sigma_S^2 + a_S \cdot \sigma_A^2 - (a_A + a_S) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_S \cdot \rho_{AS}},$$

hvor p_A er porteføljeandelen i Amazon-aktien, a_A og a_S er Amazon-aktiens og Siemens-aktiens forventede afkast, σ_A og σ_S er Amazon-aktiens og Siemens-aktiens standardafvigelser, og ρ_{AS} er korrelationen mellem Amazon-aktien og Siemens-aktien.

2. Find derefter porteføljeandelen i Siemens-aktien.

Opgave 2: Korrelationens betydning for den optimale portefølje

Du kan investere i en portefølje bestående af Apple-aktien og Tesla-aktien:

- Apple-aktien har et forventet afkast på $a_A = 8\%$ og en standardafvigelse på $\sigma_A = 18\%$.

- Tesla-aktien har et forventet afkast på $a_T = 12\%$ og en standardafvigelse på $\sigma_T = 30\%$.

Beregn de optimale porteføljeandele p_A og p_T i henholdsvis Apple-aktien og Tesla-aktien i følgende tre scenarier:

1. Korrelationen mellem de to aktiers afkast er $\rho_{AT} = 0,80$.
2. Korrelationen mellem de to aktiers afkast er $\rho_{AT} = 0$.
3. Korrelationen mellem de to aktiers afkast er $\rho_{AT} = -0,60$.
4. Sammenlign resultaterne, og forklar, hvordan korrelationen påvirker de optimale porteføljeandele.

Opgave 3: Den optimale porteføljes afkast og standardafvigelse

Du kan investere i en portefølje bestående af Novo Nordisk-aktien og Carlsberg-aktien:

- Novo Nordisk-aktien har et forventet afkast på $a_N = 9\%$,
- Novo Nordisk-aktien har en standardafvigelse på $\sigma_N = 25\%$,
- Carlsberg-aktien har et forventet afkast på $a_C = 4\%$,
- Carlsberg-aktien har en standardafvigelse på $\sigma_C = 10\%$,
- korrelationen mellem de to aktiers afkast er $\rho_{NC} = 0,15$.

1. Beregn de optimale porteføljeandele p_N og p_C i henholdsvis Novo Nordisk-aktien og Carlsberg-aktien.
2. Beregn den optimale porteføljes forventede afkast.
3. Beregn den optimale porteføljes standardafvigelse.
4. Beregn forholdet mellem porteføljens forventede afkast og dens standardafvigelse.

6 Mundtlig eksamen

Afkast og risiko

Forklar med udgangspunkt i et simpelt eksempel, hvad afkast og risiko er. Giv en matematisk fortolkning af opbygningen af formelen for risiko. Forklar hvorfor den optimale portefølje for to aktier svarer til et problem i differentialregning.

1. Hvad er afkast og risiko?

Afkastet af en investering fortæller grundlæggende, hvor meget man har tjent eller tabt over en given periode. Afkastet kan måles både i kroner og i procent. Forestil dig, at jeg køber en aktie for 100 kr., og et år senere er den 110 kr. værd. Afkastet i kroner beregnes som:

$$110 \text{ kr.} - 100 \text{ kr.} = 10 \text{ kr.}$$

Afkast i kroner måler, hvor mange kroner investeringen er steget eller faldet i værdi. Afkastet i procent beregnes som:

$$\frac{110 \text{ kr.} - 100 \text{ kr.}}{100 \text{ kr.}} = 0,10 = 10\%.$$

Afkast i procent måler ændringen i investeringens værdi i forhold til det oprindeligt investerede beløb.

Risiko handler om usikkerhed og kan i sin enkleste form forstås som et udtryk for, hvor meget en aktie svinger i afkast fra år til år. Hvis en aktie over tre år giver 8%, 9% og 7%, bevæger afkastene sig kun lidt op og ned. Hvis en anden aktie giver 20%, -10% og 15%, svinger afkastene langt mere. Jo større udsvingene er, desto større er risikoen.

Mere præcist handler risiko ikke bare om, at afkastene svinger, men om hvor langt de enkelte afkast ligger fra deres gennemsnit. Man kan tænke på gennemsnittet som et midtpunkt. Risikoen afhænger af, hvor langt væk observationerne bevæger sig fra dette midtpunkt.

I de to eksempler — henholdsvis 8%, 9% og 7% samt 20%, -10% og 15% — er gennemsnitsafkastet næsten det samme: 8% i det første tilfælde og cirka 8,3% i det andet. Alligevel opleves de to aktier forskelligt. I det første tilfælde ligger de enkelte års afkast tæt på gennemsnittet. Hvert år minder nogenlunde om det typiske år. I det andet tilfælde ligger afkastene langt fra gennemsnittet. Nogle år ligger meget over det typiske niveau, andre langt under.

Det er netop denne afstand til gennemsnittet – altså hvor spredt afkastene er omkring deres gennemsnit – der er aktiens risiko. Den anden aktie er derfor mere risikabel.

2. Den matematiske opbygning af risikoformlen

Risiko måles med standardafvigelsen fra Afsnit 2.3:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - a)^2 + (a_2 - a)^2 + \dots + (a_n - a)^2}{n - 1}}.$$

Hvis vi kigger på formelen trin for trin, er det første vigtige element det gennemsnitlige afkast a . Dette tal er "midtpunktet," som vi måler alt andet ud fra. Ved at beregne forskellen mellem hvert

års faktiske afkast og gennemsnittet, $a_i - a$, finder vi afvigelsen for det enkelte år. Jo længere de enkelte observationer ligger fra gennemsnittet, jo større er udsvingene i investeringen. Afstanden til gennemsnittet fortæller os derfor, hvor usikkert afkastet er.

Dernæst kvadrerer vi afvigelserne, så positive og negative afvigelser ikke ophæver hinanden. Herefter lægger vi de kvadrerede afvigelser sammen og dividerer med $n - 1$, hvor n er antallet af observationer.

Til sidst tager vi kvadratroden (husk, at vi tidligere har kvadreret afvigelserne), så resultatet igen får samme enhed som afkastet, nemlig procent. Resultatet er standardafvigelsen, som kan fortolkes som et mål for den typiske afstand mellem et års afkast og det gennemsnitlige afkast.

3. Hvorfor er den optimale portefølje et problem i differentialregning?

Når vi kombinerer to aktier i en portefølje, skal vi beslutte, hvor stor en del af formuen der placeres i hver aktie. Lad p_1 betegne porteføljeandelen i Aktie 1 og p_2 porteføljeandelen i Aktie 2. Da hele formuen investeres, skal porteføljeandelene tilsammen udgøre 100%:

$$p_1 + p_2 = 100\% = 1.$$

Hvis vi kender den ene porteføljevægt, er den anden derfor automatisk bestemt. Vælger vi p_1 , følger det, at

$$p_2 = 1 - p_1.$$

Porteføljens sammensætning kan således beskrives ved hjælp af blot én variabel. Vælger vi eksempelvis at investere 60% af formuen i Aktie 1, har vi

$$p_1 = 0,60.$$

Andelen, der investeres i Aktie 2, bliver da

$$p_2 = 1 - 0,60 = 0,40,$$

svarende til 40% af formuen.

Vi behøver altså ikke at bestemme de to porteføljevægte hver for sig. Når p_1 er valgt, følger p_2 entydigt. Dermed reduceres problemet fra to ukendte porteføljevægte til én. Ved at indsætte $p_2 = 1 - p_1$ i formlerne for porteføljens forventede afkast fra Afsnit 2.9 og porteføljens standardafvigelse fra Afsnit 2.11 kan begge formler udtrykkes som funktion af kun p_1 :

$$a_p(p_1) = p_1 \cdot a_1 + \underbrace{(1 - p_1)}_{p_2} \cdot a_2,$$

$$\sigma_p(p_1) = \sqrt{p_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \underbrace{(1 - p_1)^2}_{p_2^2} \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot p_1 \cdot \underbrace{(1 - p_1)}_{p_2} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}},$$

hvor p_1 er porteføljeandelen i Aktie 1, a_1 og a_2 er Aktie 1's og Aktie 2's forventede afkast, σ_1 og σ_2 er Aktie 1's og Aktie 2's standardafvigelser og ρ_{12} er korrelationen mellem Aktie 1 og Aktie 2. Som beskrevet i Kapitel 3 er den optimale portefølje den portefølje, der maksimerer forholdet mellem porteføljens forventede afkast og dens standardafvigelse. Matematisk svarer det til at

finde den værdi af p_1 , der maksimerer funktionen:

$$f(p_1) = \frac{p_1 \cdot a_1 + (1 - p_1) \cdot a_2}{\sqrt{p_1^2 \cdot \sigma_1^2 + (1 - p_1)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}}},$$

hvor σ_1 og σ_2 er Aktie 1's og Aktie 2's risiko (standardafvigelse) og ρ_{12} er korrelationen mellem Aktie 1 og Aktie 2.

Det er netop her, at differentialregningen kommer ind i billedet. Vi ønsker at finde den værdi af p_1 , hvor funktionen $f(p_1)$ ovenfor er størst. Derfor differentierer vi $f(p_1)$ med hensyn til p_1 og finder det punkt, hvor den afledede er lig med nul:

$$f'(p_1) = 0.$$

Da både tælleren og nævneren afhænger af p_1 , bruger vi differentialregningens værktøjer til at finde den præcise værdi for p_1 , der optimerer porteføljen. Afslutningsvis skal det kontrolleres, at det fundne punkt faktisk er et maksimum.